عُمر الخيّام

حياته وأعماله وجبره

بقلم نقولا فارس: nfares55@hotmail.com (٣-١- ٢٠١٨)
"فريق الدراسة والبحث في التقليد العلمي العربي"
(الجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة)

هذه الدراسة ترتكز إلى الفصل الخامس من كتاب: "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت، ٢٠١٧، لكاتب هذا المقال ([فارس، ٢٠١٧]).

١. حياة الخيّام وثقافته وأعماله.

١-١. حياته.

وُلد الرياضي والفيلسوف عمر الخيّام[١]، أو الخيّامي، في نيشابور، في شمال شرق إيران عام ٤٤٠ للهجرة (١٠٤٨ م) وتُوُفّي عام ٥٢٦هـ /١١٣١م في مسقط رأسه.

المعلومات الخاصّة باسمه، وبتاريخي ولادته ومماته ومكانهما مؤكّدة، وكذلك تلك المتعلّقة بعناوين مؤلّفاته التي تدلّ بوضوح على أنّه كان رياضيّاً وفيلسوفاً مميّزاً، كما عمل وكتب في علم الفلك. من المؤكّد أيضاً أنّ الخيّام كان أحد فلكيّي السلطان السلجوقي ملكشاه (الذي حكم ما بين ٤٦٥هـ/١٠٧٢م و٤٨٥هـ/١٠٩٢م) [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٣٣-٣٧]. ولكنّ المعلومات التاريخيّة المؤكّدة حول حياته تبقى ضئيلة، على الأقلّ إذا ما قيست بالروايات المتفرّقة غير المدعّمة التي تناولتها، والقريبة من الخيال[٢].

[١] غيّاث الدين أبو الفتح عُمر بن ابراهيم الخيّامي النيشابوري (بحسب عنوان إحدى نُسَخ رسالته في الجبر).

[٢] من أجمل تلك الروايات هي رائعة "سمرقند" (١٩٨٨) للأديب اللبناني-الفرنسي أمين معلوف، والتي أصدرتها عدّة دور نشر.

مجرّد اسم الخيّام يقود إلى التفكير بالشاعر الفارسي، مؤلّف "الرباعيّات" الشهير. لكن لا توجد أدلّة تاريخيّة دامغة على كون الموهبة الشعريّة والعبقريّة الرياضيّة تعودان للشخص عينه، بالرغم من أنّ ابن القفطي (٥٦٨هـ/ ١١٧٢م – ٦٤٦هـ/ ١٢٤٨م) يذكر أنّ الرياضي والفيلسوف والفلكي عمر الخيّام كتب شعراً. ولا توجد أيضاً أدلّة تؤكِّد على وجود شخصين مختلفين يحملان الاسم نفسه.

يُعيد ف. وبكه [Wœpcke, 1851, p. 52, ar.]، ويترجم (إلى الفرنسيّة) كامل المقطع الذي يخصّصه ابن القفطي للخيّام، والذي ينتهي بأربعة أبيات من الشعر. ويرد في ذلك المقطع: "إمام خراسان وعلاّمة الزمان، يعلم عِلم يونان ويحثُّ على طلب الواحد الديّان بتطهير الحركات البدنيّة لتنزيه النفس الإنسانيّة ويأمر بالتزام السياسة المدنيّة حسب القواعد اليونانيّة. وقد وقف متأخّرو الصوفيّة مع شيء من ظواهر شعره فنقلوها إلى طريقتهم وتحاضروا بها في مجالساتهم وخلواتهم، وبواطنها حيّات للشريعة لواسعُ ومجامع للأغلال جوامع. ولما قدح أهل زمانه في دينه، وأظهروا ما أسرّه من مكنونه، خشي على دمه وأمسك من عنان لسانه وقلمه، وحجّ متاقاة لا تقية وأبدى أسراراً من السرار غير نقيّة. ولما حصل ببغداد سعى إليه أهل طريقته في العلم القديم فسدّ دونهم الباب سدّ النادم لا سدّ النديم ورجع من حجّه إلى بلده يروح إلى محلّ العبادة ويغدو ويكتم أسراره ولا بدّ أن تبدو. وكان عديم القرين في علم النجوم والحكمة وبه يُضرَب المثل في هذه الأنواع لو رُزِق العِصمة وله شعر طائر تظهر خفيّاته على خوافيه ويكدر عرق قصده كدر خافيه" ويلي ذلك أربعة أبيات من الشعر[٣]:

[٣] عن كتاب وبكه، ص. ٥٢ من قسمه العربي. هذا المقطع الذي يذكره ف. وبكيه استناداً إلى إحدى المخطوطات، ويذكر ر. راشد أجزاء منه، موجودة في كتاب: "تاريخ الحكماء"، لابن القفطي، Ed. Julius Lippert. Leipzig, 1903, p. 243-244.

"إذا رضيت نفسي بميسور بلغة　　يحصّلها بالكدّ كفّي وساعدي
أمنت تصاريف الحوادث كلّها　　فكنّ بأزماني يدي أو مواعدي
أليس قضى الأفلاك في مرورها　　تحيد إلى نحس جميع المساعد
فيا نفس صبراً في مقيلك إنّما تخرّ ذراه بانقباض القواعد".

هذه الرواية التي يظهر فيها الخيّام قادحاً في دينه ومنافقاً، يناقضها كما نقرأ في [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٣٧] كاتب معاصر للخيّام هو البيهقي الذي يقدّمه كرياضي وفيلسوف سويّ الطّبع لا يمكن أن يتصف بالرياء.

وهناك رواية ثانية حول شخصيّة الخيّام، أوردها رشيد الدين الهمذاني (المتوفّى في القرن الثامن الهجري، أي بعد حوالي قرنين من وفاة الخيّام) في مؤلّفه الشهير "جامع التواريخ"، يبدو فيها الخيّام معاصراً لحسن الصبّاح[4]، مؤسّس طائفة الحشّاشين، وصديقاً له. ويلاحظ ر. راشد "أنّ التدقيق التاريخي النقدي في هذه الرواية يُظهِر عدم صحّتها، إذ إنّها تستدعي التسليم بأنّ الخيّام قد عمّر مائة وعشرين عاما، وهو أمر لم يكن ليخفى على أحد ولم يورِده أحد" [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٣٧]

١-٢. ثقافته.

لا تُعرف هويّة أستاذ أو أساتذة الخيّام في الرياضيّات. لكن من المؤكّد، استناداً إلى ما ذكره، هو نفسه، أنّه كان مطّلعاً على الأبحاث المتقدّمة لأسلافه المباشرين. فلقد درس الخيّام بعض كتابات ابن الهيثم (المتوفّى بعد عام ١٠٤٠ م)، وهو نفسه يذكر، رسالة يحلّ فيها هذا الأخير مسألة مجسّمة لا تحلّ بالقطوع المخروطيّة[5]. وكان يعرف بالتفصيل كتابات أبو الجود بن الليث. وقد أتى الخيّام على ذكر عدد من كبار

[4] وقد استند ف. وبكيه [pp. iv-v] إلى هذه الرواية، ويُحتمل أن يكون أمين معلوف قد استند إليها في "سمرقند".

[5] هي مسألة يجاد أربعة خطوط بين خطّين مفروضين، بحيث تتوالى الخطوط الستة متناسبة [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٢٢٤]. ويذكر ر. راشد بأنّ هذه الرسالة مفقودة (المرجع نفسه، ص. ١٣٦).

الرياضيّين، إضافة إلى هذين الاسمين، استفاد من أعمالهم، مثل الماهاني والصاغاني وأبي الوفاء البوزجاني والقوهي والخازن وابن عراق[٦]. وكان فهم أعمال هؤلاء يتطلّب ثقافة عالية في الرياضيّات اليونانيّة وخاصّة في الهندسة. ولذلك يقول الخيّام عن رسالته في الجبر "إنّ هذه الرسالة لا يفهمها إلاّ من يكون متقناً لكتاب أقليدس في الأصول وكتابه في المعطيات ومقالتين من كتاب أبلونيوس في المخروطات، وإنّ من شذّ عنه معرفة واحد من هذه الثلاثة فلا سبيل له إلى تحقّقها". وعند حديثه عن "الكميّة المتصلة"، يذكر مؤلّف أرسطو حيث يقول إنّ أقسامها "هي أربعة : الخطّ، والسطح، والجسم، والزمان، على ما هو مذكور مجملاً في قاطيغورياس ومفصلاً في الحكمة الأولى. وقومٌ يعدّون المكان نوعاً قسيماً للسطح تحت جنس المتصل؛ والتحقيق يُبطل عليهم هذا الرأي ...". ويذكر كذلك كتاب "المجسطي" في مجرى حديثه عن الحسابات التقريبيّة ... [٧].

معرفتنا بتكوين الثقافة الفلسفيّة للخيّام، أفضل من تلك العائدة لتكوين ثقافته الرياضيّة. فهو يُصنّف نفسه ضمن التقليد الفلسفي لابن سينا حيث نقرأ في أحد كتاباته: "... ومعلّمي أفضل المتأخّرين الشيخ الرئيس أبا الحسين بن عبد الله بن سينا ..."[٨]. ولاحظ ر. راشد أنّه "حتّى ولو لم نأخذ، عبارة "معلّمي" بمعناها الحرفي، فإنّنا نعلم من مصدر تاريخي آخر أنّ الخيّام كان بالفعل تلميذاً لرجل اسمه بهمنيار، تتلمذ مباشرة على يد ابن سينا"، ويثبت ذلك عن طريق نقل أحد المقاطع من كتاب "الوافي بالوفيّات" للصفدي [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٣٥].

---

[٦] راجع [فارس، ٢٠١٧، ص. ٢٢٤–٢٢٨] أو [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ١٤١–١٤٢ و١٧١–١٧٢] أو [Wœpcke, 1851, pp. 1-2].

[٧] [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ١٧٣ و١٧٤، و٢٤٦].

[٨] يرجع ر. راشد إلى رسالة الخيّام ذات العنوان: "الكون والتكليف" (ص. ٣٨)، نشرها محيي الدين صبري الكردي، ضمن مجموعة الرسائل المسمّاة "جامع البدائع" بمطبعة السعادة بالقاهرة، سنة ١٩١٧.

١-٣. أعماله.

لا ترِد في مؤلّفات قدامى كتّاب السِّيَر، لوائح بما كتبه الخيّام. وهذا النقص يجعل من المستحيل الإحصاء الدقيق لكامل مؤلّفاته كما أنّه لا يساعد على حسم التساؤل الشائك حول ما إذا كان الشاعر والفيلسوف هو نفسه الرياضي الخيّام. اللائحة التي نقدّمها في ما يلي والتي تحوي ١٣ عنواناً وردت في كتاب ر. راشد وب. وهاب زاده المذكور أعلاه (ص. ٣٧-٣٨). نضيف فقط بعض الشروح المختصرة لرسائله الرياضيّة التي لا نعرف منها سوى أربعة، وصل منها ثلاثة فقط إلى عصرنا:

١) "رسالة في قسمة ربع الدائرة"، يحلّ فيها مسألة هندسيّة عن طريق تحويلها إلى معادلة تكعيبيّة رباعيّة الحدود، يحلّها بتقاطع قطع زائد مع دائرة. لهذه الرسالة أهميّة كبيرة من الناحية التاريخيّة. فالخيّام، يعرض فيها لوضع البحث في المسائل الهندسيّة المجسّمة في عصره، ويحدّد فيها مشروعه في الجبر، الذي يَعِد بتنفيذه في رسالة مستقلّة[٩]، وهو مشروع حلّ جميع أصناف معادلات الدرجة الثالثة وما دون، ويُعدّد تلك الأصناف. ومن ناحية أخرى، تتعرّض هذه الرسالة إلى أمور تتعلّق بفلسفة الرياضيّات مثل أسس الجبر والعلاقة بين الجبر والهندسة[١٠]، وتعطي قراءتها فكرة مهمّة عن الصياغة الرياضيّة وعن طرائق التحليل والتركيب في ذلك العصر.

٢) "مقالة في الجبر والمقابلة"، وهي رسالته الرئيسيّة في الجبر، التي وعد بكتابتها في الرسالة السابقة. وستكون مرجعنا الرئيسي في الحديث عن جبر الخيّام. هذا الجبر الذي يتألّف عمليّاً منها ومن الرسالة السابقة.

[٩] رسالته الأساسيّة في الجبر: "مقالة في الجبر والمقابلة".

[١٠] أنظر دفارس، ٢٠١٧، ص. ٢٢٨] أو [راشد ووهاب زادة، ٢٠٠٥، ص.٢٣٧-٢٣٨].

٣) رسالة "في شرح ما أشكل من مصادرات كتاب أقليدس"؛ وهي تعالج مسائل تتعلّق بأسس الرياضيّات وفيها ثلاث "مقالات" يمكن وضعها في فصلين:

- الفصل الأوّل يهدف إلى "برهان" ما يعرف بـ "مصادرة أقليدس الخامسة". ومحاولة البرهان هذه هي مشروع شغل كبار الرياضيين على امتداد أكثر من عشرين قرناً وأدّى العمل الذي بذل فيه إلى ولادة الهندسات اللاأقليديّة، في القرن التاسع عشر للميلاد،

- والفصل الثاني يحوي "مقالتين" حول النسبة والتناسب، تظهران صعوبات التحديدات الأقليديّة الواردة في الكتابين الخامس والسادس من "الأصول" وإشكالاتها، وتتصدّيان لها. وتُظهر قراءة الرسالة، والقسم الثاني هذا بشكل خاصّ، أنّ نصوصه في غاية الأهميّة بالنسبة إلى الباحثين في فلسفة الرياضيّات.

٤) العمل الرياضي الرابع للخيّام، هو كتابه حول استخراج الجذر "النوني" (من أيّ مرتبة كانت) لعدد ما. يأتي الخيّام نفسه على ذكره في رسالته الجبريّة، ويدّعي أسبقيّة النتائج التي توصّل إليها وأصالتها بهذا الصدد حيث يقول: "وللهند طرق في استخراج أضلاع المربّعات والمكعبات مبنيّة على استقراء قليل، وهو معرفة مربّعات الصُوَر التسعة، ... وكذلك مضروب بعضها ببعض ... ولنا كتاب في البرهان على صحّة تلك الطرق وتأديتها إلى المطلوبات. وقد عزّزنا أنواعها، أعني من استخراج أضلاع مال المال ومال الكعب وكعب الكعب، بالغاً ما بلغ، ولم نُسبق إليه"[١١].

من المصنّفات العلميّة الأخرى للخيّام:

٥) الزيج الملكشاهي، ٦) كتاب في صنعة ميزان الحكمة، ٧) نوروز نامه (كتاب النوروز)، ٨) شرح المشكل من كتاب الموسيقى.

ومن مصنّفاته الفلسفيّة:

[١١] أنظر نص الخيّام [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ١٧٧-١٧٨].

٩) رسالة "في الكون والتكليف"، ١٠) تتمّة الرسالة السابقة، ١١) الرسالة الأولى في الوجود، التي سمّاها ناشرها فيما بعد: "الضياء العقلي في موضوع العلم الكلّي"، ١٢) رسالة في الوجود، ١٣) رسالة بالفارسيّة في كليّة الوجود.

٢. تطوّر الجبر في الاتجاه الهندسي قبل الخيّام.

مثله مثل كلّ العلوم والنظريّات الرياضيّة التي بدأت قبل القرن التاسع عشر، لم يمتلك علم الجبر عند ولادته (مع الخوارزمي في الثلث الأوّل من القرن التاسع م – الثالث هـ)[١٢] النظام المصادراتي الخاصّ به، والذي يكفي للسماح بأن تُبَرهَنَ كلُّ قضاياه استناداً إلى ذلك النظام. فكان من الطبيعيّ أن يلجأ معاصرو الخوارزمي، وكذلك خلفاؤه المباشرون، إلى الهندسة وإلى علم الحساب، لدعم "براهينهم" في الجبر، في مجرى تطويرهم لهذه المادّة العلميّة. فقد كان كلّ من هذين العلمين مزوّداً بشكل من أشكال الأسس المصادراتيّة المتماسكة، في كتاب "الأصول" لأقليدس، الذي تُرجِم إلى العربيّة في عصر الخوارزمي. لذا كان من الطبيعيّ أن يتطوّر الجبر في اتجاهين، واحد يطغى فيه تأثير الهندسة، والآخر يطغى فيه تأثير علم الحساب. تجسّد هذان الاتجاهان في تيّارين من من الأبحاث الجبريّة: "التيّار الهندسي"، الذي طغى فيه تطوير الجبر بواسطة الهندسة، و"التيّار الحسابي" وهو التيّار طغى فيه تطوير الجبر بواسطة علم الحساب[١٣]. ولن نتعرّض في ما يلي من هذه الفقرة سوى إلى "التيّار الهندسي".

---

[١٢] راجع [Farès, 2015] أو [راشد، ٢٠١٠].

[١٣] وعلى حدّ علمنا، ظهر التمييز الصريح بين هذين التيّارين، للمرّة الأولى، في كتابات رشدي راشد في تاريخ الجبر: أنظر لائحة المراجع: [راشد، ١٩٩٧] = [Rashed, 1997] (مج. ٢، الفصل الثاني)، و[راشد، ١٩٨٩] = [Rashed, 1984] للاتجاه الحسابي، و [ر. راشد، ١٩٩٨] = [Rashed, 1986] للاتّجاه الهندسي؛ هذه الكتب متوفّرة باللغتين الفرنسيّة والعربيّة. التمييز بين التيارين المذكورين لم يكن ممكناً (بشكل صريح) قبل العقود الأخيرة من القرن العشرين، أي قبل أن يتوفّر ما يكفي من أبحاث ومعلومات حول الجبر المكتوب بالعربيّة بين القرنين التاسع والثالث عشر. بهذا الخصوص، نذكر أنّ أ. ب. يوشكيفتش يشير إلى مَيل أبحاث أبي= =كامل

اعتمدت الاستدلالات الهندسيّة للخوارزمي ولخلفائه المباشرين، حتّى نهاية القرن التاسع للميلاد، بدءاً من ابن ترك وثابت بن قرّة وأبي كامل، على تمثيل المقادير الجبريّة هندسيّاً (أي تمثيل "الشيء"، x، بقطعة من خط مستقيم، و"المال"، x^2، بالمربّع الذي ضلعه x، و $a.x$ بالمستطيل ذي الضلعين a و x، ...). ساعدهم ذلك التمثيل على ترجمة المسائل والحسابات الجبريّة من الدرجة الثانية هندسيّاً أي تحويلها إلى مسألة هندسيّة تتعلّق بالمساحات والأطوال وبالتالي على حلّها بواسطة الهندسة، ومكّنهم من التبرير الهندسي لبعض قواعد الحساب الجبري ولخوارزميّات حلول معادلات الدرجة الثانية. وبالمقابل استُخدِم ذلك التمثيل أيضاً لتحويل عدد من المسائل الهندسيّة المتعلّقة بالأطوال والمساحات إلى معادلات جبريّة من الدرجة الثانية وحلّها بواسطة الجبر.

وفي مرحلة لاحقة بدأت منذ النصف الثاني من القرن التاسع للميلاد، كان بإمكان خلفاء الخوارزمي أن يقرأوا كلّ الرياضيات اليونانيّة على ضوء الجبر. وهذا ما قام به عددٌ كبير منهم، محدِثين تيّاراً نشيطاً من البحث، غذّى ترجمة بالاتجاه المعاكس: من الهندسة إلى الجبر. شكّلت تلك القراءات الجبريّة مؤشّراً على بداية نضوج الجبر وبداية تدخّله في الهندسة ليسهم، بدوره، في تطوير هذا العلم. فقد مكّنت الرياضيّين من التعبير عن مسائل هندسيّة معقّدة بواسطة علاقات جبريّة. ولا مجال هنا لّتلحديث عن أهميّة القراءات الجبريّة لكتاب "الأصول" لأقليدس، وخاصّة للكتاب العاشر منه، التي غيّرت وجه نظريّة المقادير غير المنطَقة، وشكّلت ميداناً

الجبريّة إلى "الاتجاه الحسابي" [Youschkevitch, 1976, p. 56]، وسبق أن أشار ع. أنبوبا إلى "تيّار الجبر الهندسي الذي يتنافس مع التيّار العددي ..." خلال مسيرة تطوّر الجبر [Anbouba, 1978, p. 82].

مهمّاً للتمارين الجبريّة[١٤]. إلاّ أنّ علينا أن نشير إلى القراءات الجبريّة لكتاب "مخروطات" أبولونيوس (القرن الثاني ق. م) الذي تُرجِمَ إلى العربيّة منذ القرن التاسع للميلاد؛ ذلك لأنّ القراءات الجبريّة لهذا الكتاب أنتجت نوعاً جديداً من تدخّل الجبر في الهندسة، كما أدخلت نوعاً جديداً من الاستدلال الهندسي في الجبر. ذلك الاستدلال لا يرتكز على تمثيل المقادير الجبريّة هندسيّاً (مثل تمثيل x^2 بمربّع، وx^3 بمكعب، ...) بل على التعبير جبريّاً عن خصائص بعض المنجنيات الهندسيّة.

تمّ الوصول إلى ذلك التطوّر في نهاية فترة طويلة من النشاط البحثي عولِج خلالها عدد من المسائل الهندسية "الجِرميّة" الموروثة من الرياضيّات اليونانيّة[١٥] ومسائل أخرى طَرحتها البحوث في الرياضيات[١٦]، أو في مجالات علميّة أخرى[١٧]. قام الهندسيّون بحلّ تلك المسائل بطرائق هندسيّة تستخدم تقنيّة تقاطع القطوع المخروطيّة (الدائرة، والقطوع الثلاثة الأخرى: الناقص، والزائد والمكافئ)، وهي تقنيّة ورثوها عن أسلافهم اليونانيّين. أمّا الجبريّون فقد عالج قسم منهم تلك المسائل عن طريق ترجمتها إلى معادلات جبريّة، كانت بالطبع من درجة أعلى من الثانية، وغالباً من الدرجة

[١٤] توجد أمثلة عن القراءات الجبريّة لبعض قضايا وتحاديد الكتابين ٢ و٥ في الفقرة ١ من الفصل الثاني من [فارس، ٢٠١٧]. للاطّلاع على القراءات الجبريّة للكتاب العاشر من "الأصول"،"تحسن مراجعة [Ben Miled, 2005] أو [راشد ، ١٩٩٧، الفصل الثاني]، و[Farès, 2009]، أو [Farès, 2016].

[١٥] نعني بذلك، المسائل التي لا تحلّ بواسطة المسطرة والبركار مثل مسألة المتوسّطَيْن، ومسألة تثليث الزاوية (أي تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية) ومسألة تسبيع الدائرة ومسائل بناء بعض المضلّعات المنتظمة ...

[١٦] مثل المسألة التي طرحها أرشميدس في القضيّة الرابعة من الكتاب الثاني من مؤلّفه "في الكرة والاسطوانة" والتي حوّلها الماهاني (...—٨٨٠م) إلى معادلة من الدرجة الثالثة. وتلك المسألة هي التالية: قسمة الكرة بواسطة سطح قاطِع، إلى قسمين بحيث تكون نسبة حجم أحدهما إلى حجم الآخر معلومة. حوّل الماهاني (...—٨٨٠م) هذه المسألة إلى المعادلة: $x^3+b=ax^2$، التي عرفت فيما بعد باسمه، وحلّها أبو جعفر الخازن (القرن العاشر م.) بواسطة قطوع مخروطيّة، حسب رواية عمر الخيّام [راشد، ٢٠٠٥، ص. ١٧١].

[١٧] مثل "مسألة ابن الهيثم" التي عُرِفت في الغرب اللاتيني باسم "*Problème d'al-Hazen*"، وهي إيجاد نقطة على الدائرة يقع عليها الضوء، انطلاقاً من نقطة معيّنة، لينعكس على نقطة أخرى معيّنة (النقطتان والدائرة في السطح نفسه). هذه المسألة التي طرحها ابن الهيثم وحلّها بواسطة دائرة وقطع زائد، تؤدّي إلى معادلة من الدرجة الرابعة.

الثالثة. ولم يكن الحساب الجبري في تلك المرحلة قد بلغ من التطوّر ما يسمح له بتقديم حلول جبريّة (أي عن طريق حساب الجذور)، لذلك الصنف من المعادلات. لذلك لجأ هؤلاء الجبريّون إلى حلّها، بواسطة تقاطع خطوط منحنية مخروطيّة، مستعينين بترجمة خصائص تلك الخطوط إلى علاقات جبريّة مكافئة لمعادلاتها بالنسبة إلى عدد من أنظمة المحاور.

شكّلت تلك الحركة البحثيّة خطوة مهمّة في تقدّم الجبر من جهة، وفي إغناء نظريّة أبولونيوس وتطويرها من جهة أخرى. فخلالها نشهد في معالجة المسألة المطروحة ذاتها ترجمة بالاتجاهين: من الهندسة إلى الجبر وبالعكس. فالترجمة الجبريّة للمسألة الهندسيّة تحوّلها إلى معادلة جبريّة؛ ثمّ، من أجل حلّ تلك المعادلة، يحوّلها الجبري إلى مساواة بين تعبيرين جبريَّين كلّ منهما يعبّر عن منحنٍ هندسي (مخروطي)، فينتج حلّ المعادلة من التقاء هذين المنحنيَين. ذلك التفاعل الجدليّ الثنائي بين الجبر والهندسة، أشّر إلى بداية فرع أساسي من الرياضيّات يسمّى الآن بـ"الهندسة الجبريّة"[١٨]، يُعالج حلّ المعادلات الجبريّة عن طريق تقاطع منحنيات هندسيّة، ويتعرّف إلى المنحنيات الهندسيّة لا عبر أشكالها الهندسيّة فحسب، بل عن طريق علاقات جبريّة.

٣. دراسات حول جبر الخيّام.

ظلّت ولادة الهندسة الجبريّة، خلال فترة طويلة من الزمن، تُنسَب إلى أعمال الرياضي والفيلسوف الفرنسي ديكارت (René Descartes, 1596-1650). واستمرّ اعتبار ديكارت كأوّل رياضيّ في التاريخ يطوّر، جبريّاً، نظريّة أبولونيوس (القرن ٣–٢ ق. م) (الهندسيّة) في القطوع المخروطيّة ويُحَدِّد المنحنيات الهندسيّة بواسطة المعادلات

[١٨] راجع [Houzel, 2002].

الجبريّة. ولكنّ تلك النظرة بدأت تتبدّل بعد منتصف القرن التاسع عشر حيث نشر مؤرّخ الرياضيّات الألماني فرانتز وبكِه كتاباً بعنوان "جبر عمر الخيّامي" [Wœpcke, 1851]. نشر وبكه، في ذلك الكتاب، رسالة عمر الخيّام ذات العنوان "مقالة في الجبر والمقابلة"، وحقّقها استناداً إلى ثلاث مخطوطات، وترجمها إلى الفرنسيّة وعلّق عليها رياضيّاً وتاريخيّاً. وأتبع ذلك بملحق مهمّ من وجهة نظر تاريخ الرياضيّات، يشير فيه إلى أعمال رياضيّين من التقليد العربي، من أسلاف الخيّام، أتى هذا الأخير على ذكرهم في رسالته الجبريّة.

بيّنت دراسة ف. وبكه هذه، أنّ أعمال العالم الفرنسي، ديكارت، التي أحدثت ثورة في الرياضيّات، في القرن السابع عشر، تجد بدايتها بالفعل في جبر الخيّام، في أوائل القرن الثاني عشر. فقد كشف وبكه النقاب لأوّل مرّة عن أنّ الفسحة الزمنيّة بين أبولونيوس (أو العلوم اليونانيّة عامّة)، وبين ديكارت، لم تكن فارغة، ولكنّها تحتوي لائحة طويلة من أسماء لعلماء كبار من التقليد الرياضي العربي. من بين هؤلاء، يذكر وبكِه أبا عبد الله الماهاني، وثابت بن قرّة (من القرن التاسع م)، وأبا الحسن الشمسي الهَرَوي، وأبا حامد الصاغاني (من القرن العاشر م)، وأبا سهل القوهي (القرن ١٠-١١م)، وأبا الجود بن الليث، والحسن بن الهيثم، وأبا الريحان البيروني، وأحمد بن عبدالجليل السجزي (من القرن ١١م). وقد أتى الخيّام على ذكر هؤلاء (باستثناء الهروي والسجزي)، وأضاف إليهم أسماء أبي الوفاء البوزجاني وأبي جعفر الخازن (القرن العاشر م)، وأبي نصر بن عراق (القرن ١١م). هؤلاء العلماء قادتهم أبحاثهم من أجل حلّ عدد من المسائل المجسّمة (منها تلك التي ورثوها عن التقليد الرياضي اليونانيّ) إلى استخدام تقنيّة تقاطع الخطوط المخروطيّة. واستعان عدد منهم بالجبر فحوّلوا عدداً من تلك المسائل إلى معادلات جبريّة من الدرجة الثالثة التي

بدأوا يحلّونها بواسطة القطوع المخروطيّة مستخدمين الترجمة الجبريّة لخصائص تلك المنحنيات.

وبهدف لفت النظر إلى ذلك النوع من النشاطات، قدّم وبكه في نهاية كتابه بعد دراسته لرسالة الخيّام الجبريّة، الملحق الذي أتينا على ذكره والذي يحوي خمس فقرات يسمّيها "إضافات"، في كلّ منها يترجِم إلى الفرنسيّة، ويشرح ويدرس مقطعاً من مخطوط عربي رياضي قديم [wœpcke,1851, pp. 91-126].

لفت كتاب ف. وبكه انتباه مؤرّخي العلوم إلى الأعمال العلميّة لعمر الخيّام وشكّل دافعاً للبحث فيها وحولها، فتوالت منذ الثلث الأوّل من القرن العشرين تحقيقات عدد من رسائله ودراساتها وترجماتها إلى عدد من اللغات (الإنجليزيّة والإيرانيّة والروسيّة) [١٩]. وكرّس مؤرّخا العلوم الشهيران بوريس أ. روزنفيلد (B. A. Rosenfeld) وأدولف ب. يوشكيفِتش (A. P. Youschkévitch) كتاباً ضخماً لأعمال الخيّام صدر (بالروسيّة) عام ١٩٦١. ووضع يوشكيفتش في كتابه حول تاريخ الرياضيّات العربيّة [Youschkévitch, 1976] عدّة مقاطع حول أعمال الخيّام في الجبر والهندسة.

وفي العام ١٩٨١، نشر الباحثان ر. راشد وأحمد جبّار كتاباً حول جبر الخيّام[٢٠]، استعادا فيه الرسالة التي حقّقها ودرسها ف. وبكه ("مقالة في الجبر والمقابلة")، وقاما بتحقيق جديد لها، نقدي، مستندٍ إلى ست مخطوطات وإلى معرفة أفضل بتاريخ النصوص، وباللغة العربيّة. وضمّ كتابهما هذا تحقيقاً لرسالة جبريّة أخرى للخيّام ("في قسمة ربع الدائرة")، كما ضمّ ترجمة إلى الفرنسيّة وتعليقاً تاريخيّاً وشرحاً رياضيّاً لكلّ من الرسالتين.

---

١٩ لمزيد من التفصيل حول تلك المنشورات، راجع [راشد و وهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ١٦٥ ، وص. ١٦٦] و[Vahabzadeh, 2014].

٢٠ بعنوان "رسائل الخيّام الجبريّة" [راشد وجبّار، ١٩٨١].

وعام ١٩٩٩، نشر ر. راشد وبيجان وهاب زاده كتاباً بالفرنسيّة بعنوان "الخيّام الرياضيّ"، أعادا فيه نشر ودراسة القسم الأساسي من الكتاب السابق[٢١]، وضمّا إلى الرسالتين الجبريّتين المذكورتين، تحقيقاً ودراسة لكتاب الخيّام ذي العنوان: "في شرح ما أشكل من مصادرات كتاب أقليدس". وضمّ الكتاب دراسة لرشدي راشد ربط فيها بداية الهندسة الجبريّة بجبر الخيّام عبر التقييم التاريخي لأعمال ديكارت في الجبر. تمّ نقلُ هذا الكتاب إلى العربيّة تحت عنوان "رياضيّات عمر الخيّام" ونُشِر عام ٢٠٠٥، مع مقدّمة حول تاريخ الجبر أضافها المترجم[٢٢].

٤. جبر الخيّام.

٤-١. مشروع الخيّام الجبري.

يتميّز عمل الخيّام الجبري بكونه تحقيقاً لمشروع واضح، عبَّر عنه هو نفسه بصريح العبارة، وبيّن أنّه مشروع لم يتصوّره أو يطرحه أحد من قبله. فقد لاحظ ذلك الرياضي أنّ عدداً من المسائل المجسّمة التي كانت موضوع بحث من سبقه من أسلافه العرب أو اليونانيّين، كانت تُحَلّ هندسيّاً بواسطة تقاطع قطوع مخروطيّة. ولاحظ أنّ سعي بعض أسلافه ومعاصريه من الرياضيّين العرب إلى حلّ بعضها أدّى إلى تحويلها إلى معادلات جبريّة تكعيبيّة، وأنّ بعضاً من هذه المعادلات عصي على الحلّ وأنّ حلّ القليل منها قد جرى في حالات خاصّة، دون التعرّض لموضوع حلّ هذا النوع من المعادلات بشكله العام، أو لمناقشة مسألة إمكانيّة وجود الحلّ أو استحالته. فكان

---

[٢١] يغيب عن هذا الكتاب التعليق على حلّ الخيّام للمعادلات من الدرجة الثانية وما دون.

[٢٢] وسنعتمد في عرضنا لجبر الخيّام على الكتاب الأخير هذا، خاصّة لكونه أخذ بالاعتبار كافّة الدراسات السابقة ونقّح وصوّب عدداً منها. إلاّ أنّ قراءته لن تغني الراغب في البحث، عن قراءة كتاب ف. وبكيه المذكور أعلاه، والذي يضمّ، بالإضافة لرسالة الخيّام الجبريّة، معطيات وتعليقات رياضيّة وتاريخيّة مهمّة.

مشروعه نتيجةً لملاحظاته تلك: حلّ جميع أصناف المعادلات الجبريّة من الدرجة الثالثة وما دون، مع مناقشة الأوضاع الخاصّة بوجود الحلّ. أعلن الخيّام عن مشروعه هذا في عَمَلَيْه الجبريَّين[٢٣]، كما أعلن أنّ حلّه لهذه الأصناف سيكون حلاًّ هندسيّاً يعتمد بشكل خاصّ على تقاطع قطوع مخروطيّة. ولاحظ أنّه لا هو نفسه، ولا من سبقه تمكّن من حلّ تلك المعادلات جبريّاً، بواسطة الجذور، وأعرب عن أمله بأن يحلّها من سيأتي بعده[٢٤]. كما حذّر من أنّ فهم حلوله الهندسيّة يتطلّب من القارئ إلماماً جيّداً بكتابَي أقليدس، "المعطيات" و"الأصول"، وبالكتابين الأوّل والثاني من "مخروطات" أبولونيوس[٢٥].

٤-٢. وصف لمحتوى رسالة الخيّام الجبريّة.

كتب الخيّام رسالته ذات العنوان "مقالة في الجبر والمقابلة" بهدف تنفيذ مشروعه الذي سبق أن أعلن عنه في رسالته حول "قسمة ربع الدائرة".

يمكن تقسيم هذه الرسالة إلى أربعة أقسام: ١) مقدّمة تاريخيّة ورياضيّة، ٢) حلول المعادلات الجبريّة من الدرجة الثالثة وما دون، ٣) المعادلات التي تحوي عكس المجهول، ٤) تعليق على أصالة عمله.

ما يهمّنا في هذه الفقرة، بشكل أساسي، هو القسم الثاني منها. ولكن لا بدّ من بعض الملاحظات حول بقيّة الأقسام.

---

[٢٣] المذكورين أعلاه "رسالة في قسمة ربع الدائرة" و "مقالة في الجبر والمقابلة".

[٢٤] "وأمّا البرهان على هذه الأصناف –إذا كان موضوع المسألة عدداً مطلقاً– فلا يمكننا، ولا لواحد من أصحاب الصناعة، ولعلّ غيرنا ممّن يأتي بعدنا يعرفه، إلاّ في الثلاث المراتب الأولى وهي العدد والشيء والمال. ... واعلم أنّ البرهان على هذه الطرق بالهندسة، لايجزي عن البرهان عليها بالعدد إذا كان الموضوع عدداً لا مقداراً ممسوحاً ..." [راشد ووهاب زاده، ص. ١٧٥]. يقصد الخيّام بـ "الثلاث المراتب الأولى وهي العدد والشيء والمال" معادلات الدرجة الثانية (التي يدخل فيها الشيء، x، والمال x^2، والعدد).

[٢٥] يكتب الخيّام في مقدّمة رسالته "مقالة في الجبر والمقابلة": "ويجب أن يُتحقَّق أنّ هذه الرسالة لايفهمها إلاّ من يكون متقِناً لكتاب أقليدس في الأصول وكتابه في المعطيات، ومقالتين من كتاب أبلونيوس في المخروطات، وأنّ من شذّ عن معرفة واحد من هذه الثلاثة فلا سبيل له إلى تحقّقها ..." [راشد ووهاب زاده، ص. ١٧٥].

قراءة المقدّمة ضروريّة لكلّ من يرغب في الاطّلاع على تاريخ الرياضيّات. فهي، من حيث أسلوبها، نموذج في صياغة المقالات البحثيّة، ما زال متّبعاً حتّى عصرنا هذا. في الفقرة الأولى منها، يعرض موضوع البحث (حلّ المعادلات من الدرجة الثالثة وما دون)، وأسباب تصوّر الموضوع والدواعي العلميّة للبحث فيه، كما يعرض ما سبق أن أنجزه أسلافه من الأبحاث على جوانب هذا الموضوع أو في بعض أجزائه، والصعوبات التي واجهوها والتي ما زالت موجودة وينبغي تذليلها من أجل إنجاز المشروع بالكمال المرجو. وتعرض المقدّمةُ أيضاً المراجعَ الأساسيّة التي استند إليها والمعلومات التي على القارئ الإلمام بها ليتمكّن من فهم بحثه.

يبدأ الخيّام الفقرة الثانية من المقدّمة بالقول إنّ موضوع علم الجبر هو "العدد المطلق" أو "المقادير الممسوحة" (الخط والسطح الجسم)، وبأنّ من "عادة الجبريّين أن يسمّوا المجهول شيئاً ...". ثمّ يتحدّث عن قوى الشيء وتناسب تلك القوى بإيجاز شديد، تفادياً للإطالة، معتبراً (بالتأكيد) أنّ ذلك الحديث من البديهيّات التي أصبحت معروفة في عصره. ويعكس مستوى الرياضيات في عصره، في حديث مهمّ عن الأبعاد إذ إنّه يُنبّه إلى أنّ لا وجود في الهندسة إلاّ للأبعاد الثلاثة الأولى، فهو يقول: "وإذا استعمل الجبري مال المال في المساحات، فإنّ ذلك على سبيل المجاز لا على سبيل التحقيق. إذ محال ان يكون في المقادير مال المال، والذي يقع في المقادير هو البعد الواحد، وهو الجذر أو الضلع إذا أضيف إلى مربّعه، ثمّ البعدان وهو السطح، والمال في المقادير هو السطح المربّع، ثمّ الثلاثة الأبعاد وهو الجسم، والمكعب في المقادير هو المجسّم الذي يحيط به ستّة مربّعات، وإذ لا بُعدَ آخر فلا يقع فيها مال المال فضلاً عمّا فوقه ..."[٢٦].

[٢٦] [راشد ووهاب زاده، ص. ١٧٤] و[Wœpcke,1851, p. 7-8].

ثمّ يعدّد المعادلات التي يمكن أن تتشكّل من مراتب المقادير الأربع التي ذكرها: "العدد، والشيء والمال والكعب"، ويرتّبها بحسب عدد حدودها، مقسّما إيّاها إلى فئتين: "مُفردات ومقترنات" ومقسّماً المقترنات بدورها إلى فئتين: "ثلاثيّة" و"رباعيّة". ويمكننا إعطاء لائحة تلك المعادلات في الجداول التالية:

المعادلات ذات الحدّين ("المفردات")				
(١) "عدد يعدل جذراً"	(1) $x = c$		**(٤) "جذور تعدل مالاً"**	(4) $x^2 = bx$
(٢) "عدد يعدل مالاً"	(2) $x^2 = c$		**(٥) "أموال تعدل كعباً"**	(5) $x^3 = ax^2$
(٣) "عدد يعدل كعباً"	(3) $x^3 = c$		**(٦) "جذور تعدل كعباً"**	(6) $x^3 = bx$

"المقترنات الثلاثيّة"	
أوّلاً: معادلات الدرجة الثانية، ومعادلات الدرجة الثالثة المكافئة لها.	
(٧) "مال وجذر يعدل عدداً"	(7) $x^2 + bx = c$
(٨) "مال وعدد يعدل جذراً"	(8) $x^2 + c = bx$
(٩) "جذر وعدد يعدل مالاً"	(9) $x^2 = bx + c$
(١٠) "كعب ومال يعدل جذراً"	(10) $x^3 + ax^2 = bx$
(١١) "كعب وجذر يعدل مالاً"	(11) $x^3 + bx = ax^2$
(١٢) "كعب يعدل جذراً ومالاً"	(12) $x^3 = ax^2 + bx$

ثانياً: معادلات الدرجة الثالثة، ثلاثيّة الحدود.	
(١٣) "كعب وجذر يعدل عدداً"	(13) $x^3 + bx = c$
(١٤) "كعب وعدد يعدل جذراً"	(14) $x^3 + c = bx$
(١٥) "عدد وجذر يعدل كعباً"	(15) $x^3 = bx + c$
(١٦) "كعب ومال يعدل عدداً"	(16) $x^3 + ax^2 = c$
(١٧) "كعب وعدد يعدل مالاً"	(17) $x^3 + c = ax^2$
(١٨) "عدد ومال يعدل كعباً"	(18) $x^3 = ax^2 + c$

"المقترنات الرباعيّة" (معادلات الدرجة الثالثة، رباعيّة الحدود) أوّلاً: حيث "ثلاث مراتب معادلة لواحدة"	
(١٩) "كعب ومال وجذر يعدل عدداً"	(19) $x^3 + ax^2 + bx = c$
(٢٠) "كعب ومال وعدد يعدل جذراً"	(20) $x^3 + ax^2 + c = bx$
(٢١) "كعب وجذر وعدد يعدل مالاً"	(21) $x^3 + bx + c = ax^2$
(٢٢) "كعب يعدل جذراً ومالاً وعدداً"	(22) $x^3 = ax^2 + bx + c$
ثانياً: حيث "مرتبتان معادلتان لاثنتين"	
(٢٣) "كعب ومال يعدل جذراً وعدداً"	(23) $x^3 + ax^2 = bx + c$
(٢٤) "كعب وجذر يعدل مالاً وعدداً"	(24) $x^3 + bx = ax^2 + c$
(٢٥) "كعب وعدد يعدل جذراً ومالاً"	(25) $x^3 + c = ax^2 + bx$

ملاحظات.

١- لم يعطِ الخيّام لائحة المعادلات في جدول ولم يرقّمها؛ ولكنّنا تبنّينا هذا الترقيم لتسهيل الرجوع إلى أيّ واحدة منها، وهو ترقيم يطابق الترتيب الذي اعتمده الخيّام في الإعلان عنها، وفي معالجتها. وترتيبه هذا يختلف عن ذلك الذي سبق أن أعطاه في رسالته حول تقسيم ربع الدائرة.

٢- أعطى الخيّام لائحة المعادلات بالتعابير التي ذكرناها ولكنّه عدّل تلك التعابير عندما بدأ بحلّ المعادلات الواحدة تلك الأخرى، فأصبحت أكثر دقّة: على سبيل المثال، عبّر عن المعادلة (١٣) كما يلي: "مكعب وأضلاع يعدل عدداً"، ...، وعن المعادلة (٢٥) كما يلي: "مكعب وأعداد تعدل أضلاعاً وأموالاً".

٣- بدأ معالجته للمعادلة (٣)، بعد المعادلتين (١) و(٢) مباشرةً، فلاحظ أنّها مسألة مجسّمة، يحتاج حلّها إلى قطوع مخروطيّة فأجّل ذلك الحلّ بحيث جعلها أولى المعادلات التكعيبيّة الفعليّة (التي لا تعود إلى معادلات من الدرجة الثانية).

القسم الثالث من "المقالة" يلي حلّ المعادلات التكعيبيّة. ويعالج مسألة حلّ المعادلات التي تحوي عكس المجهول. تذكيره السريع بالتحديدات والحسابات التي يدخل فيها "الشيء" وقواه وعكوسها، يوحي بأنّه يفترض بأنّها معروفة من قبل قارئ رسالته الذي لا بدّ أن يكون قد اطّلع على جبر سلفه الكرجي. وينطلق الخيّام من نظرته الهندسيّة إلى الجبر، وأنّ لا معنىً هندسيّاً لقوى المجهول التي تفوق الثالثة، ليحصر عمله بالمعادلات التي لا تحتوي سوى:

$$\frac{1}{x^3} \text{ وَ } \frac{1}{x^2} \text{ وَ } \frac{1}{x} \text{ وَ } 1 \text{ وَ } x \text{ وَ } x^2 \text{ وَ } x^3$$

وينبّه إلى أنّ بعض المعادلات من هذا النوع تؤدّي إلى معادلات جبريّة من الدرجة الخامسة أو السادسة التي لا يمكن حلّها بالقطوع المخروطيّة. لذا يحصر العمل في هذا النوع من المعادلات بتلك التي تتحوّل إلى المعادلات الجبريّة من الدرجة الثالثة. إحدى المعادلات التي أوردها الخيّام في هذا القسم هي التالية:

$$x + 2 + \frac{10}{x} = \frac{20}{x^2}$$

التي ترجع إلى المعادلة

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

ويعلّق ر. راشد على ذلك بقوله "وهذه المعادلة، بالمعامِلات نفسها، نجدها في مؤلّف "*Flos*" لفيبوناتشي وكان الخيّام قد حلّها بواسطة دائرة وقطع زائد. أمّا فيبوناتشي فيعطي لهذه المعادلة حلاً حسابيّاً. ولا نعلم كيف قامت هذه المعادلة برحلتها لتحطّ رحالها في ذلك الكتاب. وعلى كلّ حال، فإنّ مسألة الانتقال هذه (إلى الرياضيّات اللاتينيّة) توحي بالعديد من الفرضيّات التي يصعب ترجيح الواحدة منها على الأخرى"[٢٧].

القسم الرابع والأخير من "مقالة" الخيّام لا يحمل عنواناً، ولكنّ ر. راشد وأحمد جبّار أعطياه العنوان التالي: "مسالة أبي الجود بن الليث". ويبدو أنّ الخيّام قصد، من وراء إضافته، أن يبيّن أصالة مشروعه وأصالة تحقيق ذلك المشروع. فهو يلفت النظر مرّة ثانية إلى أنّ ما تحقّق قبله من أبحاث في موضوع حلّ المعادلات التكعيبيّة، لم

[٢٧] [راشد ووهاب زاده، ص. ١٣٧]. يُرجع ر. راشد إلى الصفحة ١٤٩ من مقاله التالي:
R. Rashed – "Fibonacci et les mathématiques arabes". *Micrologues* II, 1994, p. 145-160.

يتعرّض لهذا الموضوع بعموميّته، وأنّ ذلك جرى في إطار معالجة بعض المسائل الهندسيّة التي تمّ تحويلها إلى مسائل حلّ معادلات تكعيبيّة. ويبيّن أنّ محاولات أبي الجود بالذات (التي يبدو أنّه يعتبرها الأكثر تقدّماً في هذا المجال) جرت "من غير استيفاء جميع أنواعها وتمييز الممكن من المستحيل، بل بحسب ما تأدّى به النظر في المسائل الجزئيّة إليها". ويذكر أنّه اطّلع على حلّ أبي الجود لمعادلتين من صنفين من أصنافها، وهذان الصنفان هما: "مكعب وعدد يعدل أموالاً" و"مكعب وعدد وأضلاع تعدل أموالاً". وعن حلّ أبي الجود للمعادلة الثانية يقول:" فلعمري إنّه أحسن في الوقوف على هذه المسألة بعدما أعيت جماعة من المهندسين. ولكنّ مسألته جزئيّة، وللصنف أنواع وشرائط؛ فإنّ في مسائله ما يستحيل؛ فلم يستوفها حق الاستيفاء". أمّا عن المعادلة الأولى فيقول إنّ أبا الجود "لم يستوفِ شرائطها ثمّ أبطل أيضاً في حكمه في هذا الصنف ...". ويقول بعد ذلك "إنّ واحداً من أصحابنا اقترح علينا أن نبيّن خطأ أبي الجود" فيها[٢٨]. وبالفعل يعمد في ما تبقّى من هذا القسم إلى تبيان نواقص الحلّ الذي سبق أن أعطاه سلفه لهذه المعادلة كما يبيّن أحد الأخطاء التي وقع فيها أثناء حلّها. ولا بدّ هنا من أن نلحظ الأسلوب المهذّب والبعيد عن التباهي الذي يتّبعه الخيّام تجاه أسلافه وخاصّة في نقد حلول أبي الجود الذي كرّر وصفه بـ"الفاضل"[٢٩].

٤-٣. وصف لحلول المعادلات.

عبّر الخيّام بصراحة عن نيّته باعتماد الهندسة في حلوله للمعادلات. وهذا ما قام به بالفعل. ولكنّ ترجمة المعادلات إلى لغة الهندسة يحتاج إلى حسابات هندسيّة.

---

[٢٨] [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٢٢٦-٢٢٧]، [Wœpcke, 1851, p. 82].

[٢٩] راجع [فارس، ٢٠١٧، ص. ٢٢٤-٢٢٦] أو [راشد ووهاب زاده، ٢٠٠٥، ص. ٢٤٠-٢٤١].

لذلك أدخل الخيّام إلى الجبر مفهوم "الوحدة" أو (وحدة القياس) في كلّ من الأبعاد الثلاثة (الخط والسطح والجسم)، وهو مفهوم كان قد استخدمه الرياضيّون الهندسيّون من قبله كبني موسى وابن الهيثم. ومكّنه إدخال الوحدة الهندسيّة في الحسابات من الانسجام مع اتجاهه الهندسي واحترامه الصارم للتجانس في المعادلات. وقد رأينا (في فقرة سابقة) كيف ربط المقادير الجبريّة "الشيء" و"المال" و"الكعب" بالمقادير الهندسيّة "الخط" والسطح ("المربّع") والمجسّم ("المكعب"). ولكي تكون المعادلة متجانسة، يعتبر الخيّام معاملاتها كمقادير هندسيّة، ينبغي أن تخضع أبعادها لشرط كون تلك المعادلة مساواةً بين مقادير متجانسة. وعلى سبيل المثال ينبغي، في المعادلة: $x^3+ax^2+bx=c$، (كما في أيّ من المعادلات التكعيبيّة)، أن يكون c مجسّماً مكعباً (أو متوازي سطوح قائم الزوايا، قاعدته مربّع الواحد وارتفاعه c)، يجب كذلك أن يكون b سطحاً مربّعاً، وأن يكون a خطّاً (أي قطعة من خط مستقيم). فهو يقول: "وكلّما قلنا: عدد يساوي سطحاً في هذه الرسالة، فإنّا نعني بالعدد هناك سطحاً قائم الزوايا، أحد ضلعيه واحد، والثاني خطّ مساو للعدد المفروض ...". "وكلّما قلنا: عدد يساوي مجسّماً، فإنّا نعني بالعدد هناك مجسّماً متوازي الأضلاع قائم الزوايا قاعدته مربّع الواحد وارتفاعه مساو للعدد المفروض ...". "وقد عَلِمتَ ما معنى العدد المجسّم في كلامنا، وهو مجسّم يكون قاعدته مربّع الواحد وارتفاعه مثل للعدد المفروض ..."[٣٠].

ويحترم الخيّام في سياق براهينه وحساباته، بصرامة، مبدأ التجانس الهندسي. فعلى سبيل المثال، يعتبر (في المعادلة السابقة) $\frac{c}{a}$ سطحاً هو السطح المستطيل، قاعدةُ متوازي أضلاع قائم الزوايا يكون مساوياً (في الحجم) لـ c ويكون ارتفاعه a ،

[٣٠] [Wœpcke, 1851, pp. 14, 15 et 33] و [راشد ووهاب زادة، ٢٠٠٥، ص. ١٧٨ و١٧٩ و١٩٤].

ويعتبر $\frac{c}{b}$ خطّاً هو ارتفاع مجسّم تكون قاعدته b ويكون مساوياً لـ c. وهو لم ينس أن يعطي المقدّمات أو القضايا التي تمكّنه من البناء الهندسي لسطوح من الشكل $\frac{c}{a}$ أو لخطوط من الشكل $\frac{c}{b}$، أو من الشكل $\frac{b}{a}$. وهو كذلك يعطي قضايا تَلزَمه في حساباته مثل تلك التي تُمكّنه من بناء $\sqrt[3]{c}$ (ضلع المكعب المساوي لـ c) أو $\sqrt[2]{b}$ (ضلع المربّع المساوي لـ b).

٤-٣-١. المعادلات من الدرجة الثانية وما دون.

هذه المعادلات هي معادلات الخوارزمي[٣١]، وهي ذات الأرقام: ١، ٢، ٤، ٧، ٨، ٩ في اللائحة السابقة. يبدو من أسلوب الخيّام أنّه لا يتوسّع كثيراً في حلّ هذه الأصناف (وبشكل خاصّ في حلّ الصنفين ١ و٤)، ولا بدّ أن يكون ذلك عائداً إلى اعتباره أنّ حلّها أصبح معروفاً في عصره. يعطي الخيّام خوارزميّة حلّ كلّ من المعادلات ثلاثيّة الحدود ويبرّر هندسيّاً تلك الخوارزميّات. ويستخدم، في تبرير تلك الخوارزميّات، الكتابين الثاني والسادس من "الأصول" وكتاب "المعطيات" لأقليدس[٣٢].

ملاحظة. هناك ما هو جديد يجب تسجيله في حلّه للصنف (٢): $x^2 = c$. فبالإضافة إلى ذكره لرسالة له (ما زالت ضائعة) حول استخراج جذر العدد مهما كانت مرتبة الجذر، يحلّ هذا الصنف هندسيّاً بطريقة لم نصدفها عند أسلافه. يعتمد في هذه الطريقة بشكل صريح على القضيّة II.14 من "الأصول"[٣٣]. فهو يأخذ خطاً

---

[٣١] راجع [Farès, 2015] أو [راشد، ٢٠١٠].

[٣٢] كان الخيّام صريحاً في استخدامه الكتاب السادس من "الأصول" وكتاب "المعطيات" في تبريره لخوارزميّة المعادلة ٧. وكان كذلك صريحاً في استناده إلى الكتابين الثاني والسادس فيما يخصّ المعادلة ٨. ولكنّه استخدم القضيّة (II. 6) من "الأصول" فيما يخص المعادلتين ٧ و٩، بشكل ضمني.

[٣٣] انظر [Heath, 1956] أو [Vitrac, 1990-2001].

AB يمثل العدد c (أي $\frac{c}{1}$، حيث 1 هو الواحد الخطّي)، ويمدّ هذا الخطّ على استقامة إلى النقطة C، من جهة B، بحيث يكون BC مساوياً للواحد الخطّي، ثمّ يبني نصف الدائرة ذات القطرِ AC. فالعمود على AC في النقطة B يلتقي نصف الدائرة في نقطة H، ويكون $HB^2 = BC.AB = 1.AB = AB = c$. وهذه هي الطريقة نفسها التي استخدمها ديكارت، من بعد، لاستخراج الجذر التربيعي.

4-٣-٢. المعادلات التكعيبيّة المكافئة للمعادلات من الدرجة الثانية وما دون.

هذه المعادلات هي المعادلات (٥)، (٦)، (١٠)، (١١)، (١٢) في اللائحة السابقة. يبرهن الخيّام تكافؤ تلك المعادلات، على التوالي مع المعادلات التربيعيّة ذات الأرقام: (٢، ٤، ٧، ٨، ٩). تعتمد براهينه على نظريّة النسبة استناداً إلى "أصول" أقليدس. في كلّ واحدة من هذه التكافؤات الخمسة مثّل الخيّام المعادلة هندسيّاً، حيث يتمثّل x بخط مستقيم و x^2 بمربّع ذلك الخط و x^3 بمكعبه.

٤-٣-٣. حلول المعادلات التكعيبيّة الفعليّة.

يحلّ الخيّام كلاًّ من هذه المعادلات بتقاطع قطعين مخروطيين من بين القطوع التالية: الدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد (المتساوي الأضلاع). والجدول التالي يبيّن ترتيبها والثنائي من القطوع المخروطيّة الذي يستخدمه (أو يختاره) في حلّ كلّ منها.

المعادلة	ترتيبها	القطعين في حلّها
$x^3 = c$	(٣)	مكافئ ومكافئ
$x^3 + bx = c$	(١٣)	مكافئ ودائرة
$x^3 + c = bx$	(١٤)	مكافئ وزائد

مكافئ وزائد	(١٥)	$x^3 = bx + c$
مكافئ وزائد	(١٦)	$x^3 + ax^2 = c$
مكافئ وزائد	(١٧)	$x^3 + c = ax^2$
مكافئ وزائد	(١٨)	$x^3 = ax^2 + c$
دائرة وزائد	(١٩)	$x^3 + ax^2 + bx = c$
زائد وزائد	(٢٠)	$x^3 + ax^2 + c = bx$
دائرة وزائد	(٢١)	$x^3 + bx + c = ax^2$
زائد وزائد	(٢٢)	$x^3 = ax^2 + bx + c$
زائد وزائد	(٢٣)	$x^3 + ax^2 = bx + c$
دائرة وزائد	(٢٤)	$x^3 + bx = ax^2 + c$
زائد وزائد	(٢٥)	$x^3 + c = ax^2 + bx$

***

للمزيد من المعلومات حول:

١– حلول المعادلات (لغة الخيّام الرياضيّة) وترجمة تلك الحلول بلغة عصريّة،

٢– دوافع اختيار الخيّام لمنحنيات حل أنواع المعادلات التكعيبيّة، ومقارننة طرائقه في الحلّ مع طرائق ديكارت.

٣– إعلانه عن مشروعه الجبري، وعن الأعمال السابقة فيه،

٤– نظرته إلى العلاقة بين الجبر والهندسة،

٥– ملامسته لطرائق الحسابات التقريبيّة،

يمكن مراجعة [فارس، ٢٠١٧، ص. ١٩٩–٢٢٩] أو (إلاّ فيما يتعلّق بـ ٢–) [راشد ووهاب زادة، ٢٠٠٥].

المراجع
Bibliographie

*في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربيّة وبلغة أخرى، جرت ترجمتها إلى العربيّة ومتوفّرة باللغتين.

***Dans ce qui suit, les références qui sont citées en français et en arabe, ont été traduites et publiées en cette dernière langue.**

Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Ben Miled, Marwan. 1999. "Les commentaires d'Al-Māhānī et d'un anonyme, du livre X des *Eléments* dÉuclide" *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 9, no 2, Septembre.

Ben Miled, M. 2005. *Opérer sur le continu*. Académie tunisienne Beït al-Hikma, Carthage.

Djebbar, A et Rashed, R. 1981. *L'Œuvre algébrique d'al-Khayyām*, Univ. d'Alep.

راشد، ر وجبّار، أ. ١٩٨١. "رسائل الخيّام الجبريّة"، معهد التراث العلمي العربي، جامعة حلب.

Djebbar A. 2005. *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert-Paris.

Farès, N. 2005. "Note sur le choix des courbes fait par al-Khayyâm dans sa résolution des équations cubiques et comparaison avec la méthode de Descartes". *Lebanese Science Journal*, Vol. 6-1, CNRS-Liban, Beyrouth, pp. 95-117.

Farès, N. 2009. La notion d'irrationalité selon un mathématicien du X^{e} siècle: Abū Ja'far al-Khāzin. *Lebanese Science Journal*, 10 (2) ; pp. 113-123.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement analytique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2016. *Commentaire du Livre X des Éléments d'Euclide, par Abū Ja'far al-Khāzin*. Éditions de l'Université Libanaise, Beyrouth.

فارس. ن. ٢٠١٦. رسالة أبي جعفر الخازن في تفسير الكتاب العاشر من أصول أقليدس. منشورات الجامعة اللبنانيّة–بيروت.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس. ن. ٢٠١٧. الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت.

Heath, T. 1956. (Sir Thomas L. Heath). *The thirteen books of EUCLID'S ELEMENTS*, 2nd edition, 3 vol. Dover New York.

Houzel, C. 2002. *La géometrie algébrique–Recherches historiques*, Blanchard, Paris.
Al-Qifṭī' (Ibn), *Ta'rīḫ al-Ḥukamā*'. Ed. J. Lippert. Leipzig. 1903.
القِفطي (أبو الحسن علي بن يوسف)، تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمّى بالمختصرات الملتقطات من كتاب إخبار العلماء بأخبار الحكماء، تحقيق يوليوس ليبرت (ليبتزج)، ١٩٠٣.
Rashed, R. 1984. *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.
راشد، ر. ١٩٨٩. "تاريخ الرياضيات العربية – بين الجبر والحساب" مركز دراسات الوحدة العربيّة –بيروت. نقله إلى العربيّة د. حسين زين الدين عن صيغته الفرنسيّة.
Rashed, R. 1986. *Sharaf al-Dîn al-Tûsî: Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII*[e] *siècle*. T. 1 et 2. Les Belles Lettres, Paris.
راشد، ر. ١٩٩٨ (١). "الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر – مؤلّفات شرف الدين الطوسي". مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت. نقله إلى العربيّة نقولا فارس – فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي– عن الأصل الفرنسي.
Rashed, 1994. "Fibonacci et les mathématiques arabes". *Micrologues* II, p.p. 145-160.
Rashed, R. 1997 (sous la direction de, avec la collaboration de Morelon, R). *Histoire des sciences arabres*", Seuil, Paris.
راشد، ر. ١٩٩٧، (بإشرافه، بالتعاون مع مورلون، ر). "موسوعة تاريخ العلوم العربيّة" ٣ مجلّدات. مركز دراسات الوحدة العربيّة – بيروت. نقلها إلى العربيّة فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي.
Rashed, R. et Vahabzadeh, B. 1999. "*Al-Khayyām mathématicien*", Blanchard, Paris.
راشد، ر، ووهاب زاده، ب. ٢٠٠٥. "رياضيّات عمر الخيّام"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، وصدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، عن الأصل الفرنسي المذكور ([1999]).
Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

راشد، ر. ٢٠١٠. "رياضيّات الخوارزمي– تأسيس علم الجبر"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، صدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ترجمة عن الأصل الفرنسي المذكور ([Rashed, 2007]).

Rashed, R. 2012. *Abu Kāmil: Algèbre et analyse diophantienne. Édition, traduction et commentaire.* De Gruyter, Walter, Inc.

Vahabzadeh, B. 2014. "Khayyam, Omar vi. As Mathematician". *Encyclopædia Iranica Online*, available at http://www.iranicaonline.org/articles/khayyam-omar-vi-mathematician.

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Vitrac, B. 1990-2001. *Euclide d'Alexandrie. Les Éléments*, vol. 1 : 1990, vol. 2 : 1994, vol. 3 : 1998, vol. 4 : 2001. PUF, Paris.

Wœpcke, F. 1851. *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*. Librairie de l'Institut, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècle)*, Vrin, Paris.