# EUCLIDE ET L'ALGÈBRE

Par Nicolas Farès : nfares55@hotmail.com
(22-1-2018)

**Équipe d'Études et de Recherches sur la Tradition Scientifique Arabe**
**Société Libanaise d'Histoire des Sciences Arabes**

**La présente étude est extraite du chapitre I du livre de l'auteur intitulé : *Commentaire du Livre X d'Euclide par Abū Ja'far al-Khāzin*, Publications de l'Université Libanaise, 2016, Beyrouth et du chapitre II du livre de son livre : *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, 20017, Beyrouth.**

## 1. Aperçu des *Éléments* d'Euclide.

### 1. 1. Introduction.

Pour les familiers avec les mathématiques, il est superflu de rappeler l'importance des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J. C). On l'a évoquée avec les termes les plus expressives[1] et on ne sera jamais assez éloquent pour la décrire. Comme indice de cette importance rappelons que cette œuvre a « *connu à travers les siècles un si grand nombre d'éditions que seule la Bible peut déclasser* »[2]. Cet Ouvrage monumental qui avait été conçus comme manuel d'enseignement des mathématiques à l'École d'Alexandrie au tout début du III$^e$ siècle avant J-C, continuait à être utilisé comme tel, avec quelques modifications mineures, jusqu'au milieu du XX$^e$ siècle ; les *mathématiques modernes* n'ont introduit que des modifications de forme sur ses définitions et ses théorèmes. Jusqu'à nos jours, des parties importantes des *Éléments* constituent des chapitres fondamentaux des programmes de la formation des enseignants aux étapes complémentaire et secondaire, à travers le monde. La découverte au XIX$^e$ siècle des géométries non euclidiennes

---

[1] Sir Thomas Heath rapporte sur la couverture de son œuvre, [Heath, 1956], l'opinion de *l'Encyclopaedia Britannica* à ce propos : « *Le texte qui pourrait remplacer le Livre d'Euclide n'a pas été écrit et, probablement, il ne le sera jamais* ».

[2] Cf. Georges J. Kayas, *Euclide, les Éléments* ; 2 t. CNRS. 1978 ; t. 1. Préface, p.1.

(découverte qui est le fruit des discussions concernant les définitions et axiomes du livre I des *Éléments*, et notamment du 5e postulat), na pas altéré son importance.

La première traduction (connue) des *Éléments* en rabe à été faite par al-Ḥajjāj ibn Yūssef ibn Maṭar (789-833 ?), collègue d'al-Khwārizmī à *la Maison de la Sagesse* à Bagdad, sous le règne du Calife Harūn al-Rashīd (778-809). A partir de cette époque les traductions, commentaires et versions, partiels ou totaux de cette œuvre (en arabe) se sont multipliés et ont été poursuivis jusqu'au milieu du XIIIe siècle[3].

Entre le XIIe et le XVIe siècle, les *Éléments* étaient traduits en latin en plusieurs versions, à partir des versions et des traductions arabes de textes grecs. Les éditions de cette œuvre d'Euclide à partir des versions arabes ne se sont pas arrêtées après la découverte de textes grecs qui, à partir de cette époque, ont été les plus utilisés dans sa transmission en latin et en langues européennes[4].

### 1. 2. Forme et contenu des Livres des *Éléments*.

Ce fameux ouvrage d'Euclide contient 13 Livres (ou « *articles* » selon la terminologie des mathématiciens de la tradition arabe) et non 15, comme on le croyait[5].

Les Livres des *Éléments* ont presque la même architecture. A quelques exceptions près, chaque livre débute par un ensemble de définitions. Le livre X contient trois parties dont chacune commence par un groupe de définitions ; il contient d'autres définitions données au cours du Livre. Le Livre I contient, en plus des définitions, un ensemble d'axiomes (ou postulats, demandes, ou notions communes, qu'on distinguait anciennement des axiomes qui, d'après Aristote, constituent, avec les définitions, les fondements de toute science démonstrative). A la suite des définitions, viennent, dans chaque livre,

---

[3] On pourra en trouver une liste (non exhaustive) dans [Farès, 2016, pp. 11-17].

[4] Cf. [Kouteynikoff, loget et Moyon, 2013] et [Farès, 2016, pp. 11-16].

[5] Le Livre XIV traite des problèmes concernant les polyèdres réguliers et revient à Hypsiclès (2e s. av. J.-C.). Le livre XV est composé au VIe s. de notre ère et revient à un élève d'Isidore de Milet, l'architecte principal de la Cathédrale Aya Sofia.

les propositions qui sont soit des théorèmes soit des problèmes de construction. Le nombre de propositions diffère d'un livre à l'autre et, dans chaque livre ce nombre diffère d'un manuscrit édité à un autre.

La méthode de présentation des Livres des *Éléments* reste jusqu'à nos jour le modèle suivi par les livres de recherche mathématiques et, c'est sûrement pour rendre honneur à cette œuvre d'Euclide, que les bourbakistes ont donné à leur fameuse collection le nom de « *Les Éléments des Mathématiques* ».

Les Livres I-VI s'occupent de la géométrie plane, les Livres XI-XIII de la géométrie dans l'espace, les Livres VII-IX de l'arithmétique et le Livre X s'occupe des grandeurs irrationnelles. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons survoler, de la façon la plus rapide qui nous est possible, les titres des sujets de ces livres.

Le livre I : (nombre des définitions 23, des axiomes 5, des postulats 5, des propositions 48 –ou 49, selon les éditions). Les définitions et axiomes du Livre I constituent la masse la plus importante des fondements de la géométrie dite *euclidienne* (de nos jours). Ce Livre traite des problèmes fondamentaux concernant : les lignes droites, les angles (rectilignes), les angles du triangle et la comparaison des côtés relativement à celle des angles, l'égalité des triangles et l'égalité de leurs aires, les parallélogrammes et l'égalité de leurs aires ; le Livre se termine par le *Théorème de Pythagore* (C.N.S).

Le livre II : (2 définitions, 14 propositions). Ce Livre est qualifié d'être le livre de *l'algèbre géométrique*[6] dans la collection d'Euclide. Il traite un nombre d'identités revenant à la comparaison des aires rectangulaires et carrées construites sur des parties d'un segment de droite ou sur un côté d'un triangle. Le Livre se termine par la fameuse proposition II.14 qui, interprétée algébriquement, revient à la résolution géométrique de l'équation $x^2 = b$ . (Rappelons qu'al-Khwārizmī ne donne pas la résolution de cette équation géométriquement, que Descartes la résout de la même façon que celle

[6] Cette qualification, anachronique et abusive, était permise après l'introduction de l'algèbre, en tant que discipline par al-Khwārizmi (9e s.).

de II.14 sans se référer à Euclide et qu'al-Khayyām en donne la solution en citant II.14 et Euclide).

Le livre III : (11 définitions, 37 propositions). Il traite des questions concernant le cercle, les cordes, les arcs et les angles correspondants, la tangence du cercle et d'une droite ou de deux cercles. Proposition 1 : construction du centre d'un cercle donné ; proposition 37 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Le livre IV : (7 définitions, 16 propositions). Ce Livre traite des questions concernant les polygones réguliers inscrits et circonscrits dans un cercle, qu'on peut construire à l'aide de la règle et du compas[7], y compris le pentagone et celui ayant 15 côtés.

Le livre V : (18 définitions, 25 propositions). Ce Livre traite la notion du rapport de deux grandeurs homogènes. Il est, aux yeux de J. Itard [Itard, 1984, p. 92], « *le livre le plus remarquable et le pus difficile de tous* les Éléments » et, ses définitions et propositions *« sont présentées avec une rigueur logique et une élégance exemplaires »*. Sa difficulté est la raison pour laquelle il avait, à travers les siècles un assez grand nombre de commentaires expliquant la signification et les portées de ses définitions. Ces commentaires ont contribué au développement des mathématiques en général. Ils ont inspirés les mathématiciens du XIXe siècle dans leurs efforts tendant à la construction des nombres rationnels puis réels.

Le livre VI : (5 définitions, 33 propositions). Dans ce Livre, Euclide applique les résultats théoriques du Livre V sur la géométrie plane, c.à.d. sur les longueurs et les surfaces des figures constituées par des lignes droites, dans le plan. On y trouve une étude des cas de similitudes des triangles et le « *théorème de Thalès* » ainsi qu'une étude de la proportionnalité des arcs et des angles. Il contient aussi les propositions connues sous le nom de « *propositions de l'application des aires* », discutées surtout dans les milieux des algébristes arabes. Nombreux sont les mathématiciens qui étaient inspirés par ces propositions dans leurs justifications géométriques des algorithmes de résolution des types d'équations du second degré introduits par al-Khwārizmī.

---

[7] On n'y trouve pas, par exemple, la construction de l'heptagone régulier.

Le livre VII : (33 propositions et 23 définitions qui sont les définitions principales de l'arithmétique : La définition triviale du *un* (l'unité) et la définition du *nombre* à partir du un, celle d'un nombre premier et de nombres premiers entre eux, …, du produit de deux nombres …). On y trouve aussi les définitions des *nombres plans*, *carrés*, *solides, cubiques,* ainsi que les *nombres semblables* et les *nombres parfaits*. Plusieurs définitions qui s'y trouvent sont actuellement négligée et jugée superflues comme celles des nombres pairs, impairs, *pairement* (resp. *impairement*) *pairs* ou *impairs*, … La proposition 1 présente 1a méthode connue sous le nom d'*Anthyphérèse,* destinée à vérifier si deux nombres sont ou non premiers entre eux. La proposition 2 présente ce qu'on appelle *l'algorithme d'Euclide* pour trouver le p.g.c.d de deux nombres. Les autres propositions traitent des propriétés des nombres premiers, des nombres premiers entre eux, du pgcd et du p.p.c.m et des relations qui les lient. Notons que la commutativité du produit de deux nombres est prouvée dans la proposition VII.16, moyennant des propriétés de la proportionnalité.
Le livre VIII : (0 définition, 27 propositions). Ce Livre traite des questions concernant la moyenne proportionnelle, les nombres plans semblables, les nombres solides semblables, et les nombres qui se succèdent en proportion continue (i.e. formant une suite géométrique). Comme exemple, citons en langage moderne les deux propositions, X.14 : ($a^2 \ div \ b^2 \Leftrightarrow a \ div \ b$) et X.15 : ($a^3 \ div \ b^3 \Leftrightarrow a \ div \ b$).
Le livre IX : (aucune définition, 36 propositions). Dans ce Livre Euclide poursuit le traitement des questions concernant les nombres semblables plans et solides, les suites en proportion continues entre deux nombres donnés, les nombres carrés et cubiques, ainsi que les nombres pairs et impaires et reprend l'étude des suites géométriques. Dans ce Livre, Euclide présente la démonstration par l'absurde du fait que la suite des nombres premiers est infinie (démonstration qui continue à être donnée dans les Lycées jusqu'aux nos jours).
Le Livre X.
Le Livre X est le plus volumineux des 13 livres des *Éléments* ; il occupe le quart de l'ensemble environ. De même, il contient le plus de

propositions (115). Chacune de ses trois parties commence par un groupe de définitions : 4 définitions figurent au début de la 1ère partie, et 6 au début de chacune des deux autres. Ces 16 définitions ne sont pas les seules : on en trouve 6 vers la fin de chacune des deux premières parties, et deux autres ailleurs dans le Livre.

Du point de vue du contenu, on remarque que:

1) le Livre étudie la « commensurabilité » et « l'incommensurabilité » des « grandeurs » et applique cette étude particulièrement aux lignes droites et aux aires (rectangulaires)[8]. Il définit la « rationalité » et « l'irrationalité » sur chacun de ces deux types de grandeurs et étudie plusieurs propriétés les concernant ;

2) il procède à un classement des lignes irrationnelles composées par adjonction (addition, juxtaposition) ou par disjonction (soustraction, retranchement).

Comme dans le Livre V, par « *grandeur* », Euclide entend, sans le dire explicitement, une grandeur *continue*. Cela se lit entre les lignes de l'énoncé de la première proposition du Livre, et aussi de celui de la seconde qui a une certaine analogie avec la proposition 1 du livre VII.

Présenter un aperçu rapide sur les définitions et les propositions du Livre X n'est pas une tâche facile. Le Livre est, en effet, difficile à comprendre. C'est bien l'avis d'un nombre de ses lecteurs les plus importants à travers l'histoire[9]. Cela reste vrai malgré la facilité de comprendre ses définitions et les démonstrations de ses propositions,

---

[8] Ici et dans la suite, nous adaptons la terminologie du Livre X où, par ligne on entend un segment de ligne droite (en tant que grandeur : longueur) et, par rectangle, la surface de ce rectangle.

[9] D'après F. Peyrard, « *le dixième livre des Eléments d'Euclide est aujourd'hui très peu connu des géomètres français : ils regardent généralement ce livre comme superflu, et comme très difficile à entendre* » [Peyrard, II, 1816, p. i.]. J. Itard écrit : "*Sa lecture demande au mathématicien moderne une solide préparation et un courage assuré*" [Itard, 1984, p. 94]. Simon Stevin (1548-1620) avait déjà exprimé la même caractéristique du livre X en ces termes: "*La difficulté du dixiesme livre d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire jusque à l'appeler la croix des mathématiciens, matière trop dure à digérer, et en laquelle ils n'aperçoivent aucune utilité* ..." ; cf. [Heath, 1956, vol. III, p. 9].

chacune prise à part, pour un lecteur ayant déjà assimilé tout ce qui la précède dans les livres des *Éléments*[10].

<u>Le livre XI</u> : (28 définitions, 39 propositions). Avec ce Livre commence l'étude de la géométrie dans l'espace. Les définitions concernent les droites et les plans parallèles (resp. perpendiculaires), l'angle de deux plans et celui d'une droite et d'un plan, les figures solides égales ou semblables, l'angle solide, le prisme, le cône de révolution, la sphère, le cylindre et leurs axes et les polyèdres réguliers inscriptibles dans la sphère (connus sous le noms de *solides de Platon*): Le tétraèdre (la pyramide ayant 4 faces dont chacune est un triangle équilatéral), le cube (ayant six faces dont chacune est un carré), l'octaèdre (ayant huit faces dont chacune est un triangle équilatéral), le dodécaèdre (ayant douze faces dont chacune est un pentagone réguliers), l'icosaèdre (ayan vingt faces dont chacune est un triangle équilatéral). Les 28 définitions du Livre XI concernent aussi les livres XII et XIII qui ne contiennent ni définitions ni axiomes. Les propositions qui suivent ces définitions constituent les fondements de la géométrie dans l'espace et sont présentées avec un style élégant rappelant celui du Livre I.

<u>Le livre XII</u> : (0 définition, 18 propositions). Dans ce Livre Euclide poursuit l'étude commencée dans le Livre XI, traitant des questions concernant les surfaces et les volumes. Il déduit la surface du disque circulaire de celle du polygone régulier inscrit dans le cercle. Il utilise, dans ses démonstrations, la méthode dite *d'exhaustion* (restée en usage dans ce domaine jusqu'à l'introduction du calcul intégral dans sa forme moderne) et obtient, ainsi, les volumes du parallélépipède, de la pyramide et du cône, et démontre que le volume de la sphère est proportionnel au cube de son rayon.

<u>Le livre XIII</u> : (0 définition, 18 propositions). Dans ce Livre Euclide construit les cinq polyèdres réguliers inscriptibles dans la sphère, évoqués plus haut (dans le résumé du Livre XI). Il termine le Livre en démontrant que ces cinq figures sont les seuls polyèdres réguliers inscriptibles dans la sphère.

[10] Pour plus de détails sur les raison de la difficulté du Livre X et pour en consulter un résumé, voir [Farès, 2016, pp. 21-34].

**2. “Commencement” de l'algèbre – Problème des sources du livre d’al-Khwārizmī : des vues non assez claires.**

Les discussions des historiens des mathématiques reflétaient, au moins jusqu’au dernier quart du siècle dernier, une certaine incertitude, voire des controverses, sur la question des sources de l’algèbre d’al-Khwārizmī, donc sur celle du “*commencement*” de l'algèbre, ces deux questions étant étroitement liées.

A. Anbouba décrit cette incertitude en écrivant, à propos de l’algèbre d’al-Khwārizmī: “*pour les spectateurs lointains que nous sommes, l’histoire de l’algèbre chez les arabes s’ouvre sur un coup de théâtre...*” [Anbouba, 1978, p. 66]. Vers la fin du 20^e^ siècle, R. Rashed est encore plus explicite sur ce sujet, en se demandant: “... *pourquoi, nouvelle-née, cette discipline n’en est pas moins adulte et, pour quelle raison cette contribution dont plusieurs aspects suggèrent qu’elle couronne une activité passée, se présente cependant comme un commencement radical*” [Rashed, 1984 (1), p. 19].

Nous pensons qu’A. P. Youschkévitch a exprimé une opinion partagée par les historiens des mathématiques quand il a écrit, dans les années 60 du 20^e^ siècle : “*le problème des sources d’al-Khwārizmī demeure encore entier*” ; et, en comparant l’algèbre d’al-Khwārizmī avec la mathématique indienne, il a poursuivi: “*Mais son algèbre* (i.e. celle d’al-Khwārizmī) *présente une série de particularités. On ne trouve dans l’algèbre indienne aucune explication géométrique des règles de résolution des équations du second degré, ni des opérations utilisant des grandeurs algébriques, alors qu’elles tiennent chez al-Khwārizmī une place prépondérante*”. Après avoir comparé le style du livre d’al-Khwārizmī avec celui des *Eléments* d'Euclide (notamment dans le livre II), il conclut que “*le style des explications et des démonstrations est, chez ces deux auteurs, fondamentalement différent. Si l’algèbre géométrique des anciens a exercé une influence sur al-Khwārizmī, cela n’a pu se faire que sous une forme profondément transformée et adaptée aux besoins de l’algèbre numérique*” ; et, semble-t-il pour rappeler que le problème de la parenté de cette algèbre n’est toujours pas tranché, il ajoute: “*Mais c’est là une hypothèse qui, bien entendu, ne repose jusqu’à présent* *sur aucune justification historique*". D'autre part, Youschkévitch ne croit pas à une éventuelle influence diophantienne sur l'algèbre d'al-Khwārizmī, rappelant qu'« *aussi loin que l'on puisse remonter, les premières traductions arabes de Diophante, furent faites à Bagdad par le savant chrétien Qustā ibn Lūqā al-Baʿalbakkī, originaire de Baalbek (Heliopolis) au Liban, mort en 912 en Arménie, et plus tard par Abu-l-Wafā*' » [Yousckévitch, 1976, pp. 42-43].

A. Anbouba résume clairement les idées, encore en cours, à propos de l'influence de l'une ou l'autre des mathématiques indienne et grecque sur l'algèbre d'al-Khwārizmī: « *Dès le début du XIX*[e] *siècle, les discussions opposent les tenants d'une ascendance grecque aux partisants de l'origine indienne et n'aboutissent pas à une conclusion probante* » [Anbouba, 1978, p. 73].

Par ailleurs, bien que le style d'al-Khwārizmī rappelle les travaux indiens en ce qui concerne les algorithmes de résolution des équations du second degré, il rappelle aussi, par ses démonstrations géométriques, le style du livre II des Eléments d'Euclide. Cependant, les deux mathématiques, indienne et grecque, ne sont pas les seules sources probables d'al-Khwārizmī. Ce mathématicien a en effet vécu dans une région du monde où l'important héritage et les traditions scientifiques de la Babylonie auraient une grande chance de survivre et de se faire sentir, sous une forme ou une autre, même dans la vie quotidienne; l'influence babylonienne n'est donc pas à écarter. A ce propos, A. Anbouba écrit: "*Ce n'est que vers 1930, avec le déchiffrement plus large des tablettes babyloniennes que les origines de l'algèbre arabe (et de la géométrie grecque) commencent à recevoir un éclairement plus satisfaisant...*" ; il va encore plus loin, soupçonnant une influence babylonienne sur les *Arithmétiques* de Diophante, sur le livre II des *Eléments* et sur l'algèbre d'al-Khwārizmī : "*Les propositions d'algèbre géométrique des Eléments d'Euclide dont la nature et l'objet sont si éloignés de l'idéal mathématique grec et des objectifs du livre prennent alors leur véritable signification d'apport étranger. De même se trouve éclairée l'étrange physionomie d'Héron d'Alexandrie et de Diophante. L'algèbre d'al-Khwārizmī ne serait alors qu'une résurgence de ce* *vieux courant babylonien dont l'évolution et la transmission au cours des siècles restent cependant très obscures*" [Anbouba, 1978, pp. 73-74].

Nous pensons que la cause principale de cette incertitude sur la question des sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī, réside dans le manque de données historiques. En effet, al-Khwārizmī ne fait allusion à aucune de ces sources, tandis que dans son livre d'arithmétique, il exprime explicitement le fait qu'il s'y appuie sur des modèles indiens[11]. Ce manque a donné lieu à des conjectures dont certaines étaient admises comme si c'étaient des axiomes, vu la notoriété scientifique des historiens qui les ont énoncées et leur reprise, sans discussion, par les disciples et les successeurs de ces historiens. En l'absence de références précises, il était naturel de voir surgir des contradictions entre certaines de ces conjectures ainsi qu'une sorte de confusion entre la question des " sources" du livre d'al-Khwārizmī et celle des "origines" de l'algèbre. Il était admis par exemple que *Les Arithmétiques* de Diophante est un livre d'algèbre ou, au moins, qu'il constitue une des origines de l'algèbre[12]. De même, le livre II des *Eléments* d'Euclide était considéré comme le début de l'algèbre géométrique[13]. On avait aussi parlé de travaux algébriques dans la mathématique babylonienne[14] et, depuis le début

---

[11] Le traité d'arithmétique d'al-Khwārizmī ne nous est parvenu que dans une traduction latine. Dans les premières lignes de ce livre il écrit:= =« ... *nous avons décidé d'exposer la manière de compter des Indiens à l'aide des IX caractères*... » [Yousckévitch, 1976, p. 16]. D'autres œuvres d'al-Khwārizmī évoquent l'*Inde,* d'une façon ou d'une autre.

[12] Dans [Rashed, 2007 p. 61], on trouve cités plusieurs ouvrages modernes qui adoptent une telle opinion. Dans un ouvrage antérieur [Rashed, 1984 (1) p. 60], l'auteur rappelle que Paul Tannery considère que l'algèbre arabe "*ne s'élève d'ailleurs nullement au dessus du niveau atteint par Diophante*". Voir aussi [Bellosta, 2010] qui se réfère au livre de P. Tannery : *La géométrie grecque* p. 6 ; on peut aussi consulter [Taton, 1957, pp. 343-344].

[13] A partir de P. Tannery, d'après [Dahan-Delmico, Peiffer, 1986, p. 76].

[14] Certains grands historiens des sciences sont allés jusqu'à considérer les babyloniens comme étant "*les inventeurs de l'algèbre et l'on peut penser que Diophante s'est inspiré directement de leurs méthodes*" [Taton, 1957, p. 116]. Les titres de certains ouvrages contribuent, d'une façon ou d'une autre, à augmenter la

du XX$^{e}$ siècle, les idées qui voyaient dans certains travaux indiens du VI$^{e}$ ou VII$^{e}$ siècle des sources de l'algèbre d'al-Khwārizmī ont acquis une large audience.

En 2007, R. Rashed a publié un livre sur l'algèbre d'al-Khwārizmī visant, d'après son titre et son contenu, à trancher la question du « commencement de l'algèbre ». Il a étudié le problème des sources cette algèbre dans un paragraphe intitulé « les lectures mathématiques d'al-Khwārizmī » [Rashed, 2007, pp. 31-79]. Cette étude prouve qu'al-Khwārizmī a eu connaissance des *Eléments* d'Euclide et en particulier du livre II de cette œuvre. Elle prouve aussi qu'il a connu, de près, des travaux géométriques d'Héron d'Alexandrie dont il a utilisé certains problèmes. D'un autre côté, cette étude infirme l'idée considérant *Les Arithmétiques* de Diophante comme une source du livre d'al-Khwārizmī ou comme un travail algébrique qui lui est antérieur. De plus, elle écarte la possibilité de considérer les travaux indiens (ceux de Brahmagupta et d'Āryabhaṭa, en particulier) comme des sources du livre d'al-Khwārizmī. Pour arriver à ces conclusions, R. Rashed s'est basé sur l'analyse de chacun de ces travaux anciens ; la plupart des résultats de son étude ont été évoqués dans des publications antérieures à celle de son livre sur al-Khwārizmī ([Rashed, 1984 (2), 1984 (3), 1994]), ainsi que dans des interventions non publiées. Une contribution récente ([Farès, 2017, ch. I, II, III]), confirme la naissance de l'algèbre, en tant que discipline mathématique, dans le livre algébrique d'al-Khwārizmī et jamais avant. Un article qui l'a précédée [Farès, 2015], montre que ce livre d'al-Khwārizmī contient une première forme d'une axiomatique de l'algèbre.

### 3. L'algèbre et les *Éléments* d'Euclide.

Depuis le début de sa fondation dans le livre d'al-Khwārizmī, l'algèbre demeure la discipline qui s'occupe de la résolution des équations (ou des systèmes d'équations) algébriques, et du calcul polynomial. Par équation algébrique, nous entendons une équation

---

confusion autour du commencement de l'algèbre, comme par exemple "*4000 ans d'algèbre*" : 4000 Jahre Algebra, Geschichte, Kulturen, Menschen. H. W. Alen; A. Djafari Naini; M. Folkerts; H. Schlosser; K.H.Schlote; H.Wussing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

dont les deux membres sont des expressions polynomiales. Depuis le XVIe siècle, notamment avec Descartes (1596-1650) et l'utilisation généralisée des nombres négatifs, l'équation algébrique prend la forme d'une expression polynomiale égalant 0.[15]

L'algèbre est née avec le mot « *chose* », c'est-à-dire depuis l'introduction de ce mot dans le dictionnaire mathématique, et l'application des opérations de l'arithmétique (produit, somme, …) aux *choses* et aux polynômes[(*)]. Le transport (ou plutôt, l'extension) de ces opérations du domaine des nombre au domaine plus large qui est celui des « choses » est l'acte génial d'al-Khwārizmī qui a marqué la naissance de la nouvelle discipline : l'algèbre.

La suite de cet article a pour objet de montrer que la qualification, de quelques propositions des *Éléments* d'Euclide comme étant *algébriques,* est un abus qui attribue aux *Éléments* un domaine étranger à la mathématique euclidienne. Dans un autre endroit ([Farès, 2017, pp. 49-64]), nous avons montré que, de même, *Les Arithmétiques* de Diophante n'est pas un livre d'algèbre, ce qui s'accorde avec le point de vue de Rashed sur ce sujet. Nous venons de voir (fin du §2) que ce dernier montre que la mathématique indienne ancienne ne contient pas de l'algèbre et qu'elle ne constitue pas une source de l'algèbre d'al-Khwārizmī.

Euclide (vers 300 av. J-C) avait bien introduit un mot semblable au mot « *chose* » : le mot « *grandeur* ». Bien qu'il ait utilisé ce mot sans le définir ou l'expliquer, le contexte de son utilisation dans les Livres V, VI et X des *Éléments*, montre que, par « *grandeur* », il entend une certaine quantité continue. La notion de « *quantité continue* » était connue par les mathématiciens grecs, bien avant Euclide[16]. Ceux-ci savaient bien différencier les grandeurs rationnelles

---

[15] c. à. d, dans le cas d'une seule inconnue $x$, l'équation prend la forme : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i . x^i = 0$, où les coefficients $a_i$ appartiennent à un certain anneau.

[(*)] Ce mot « *chose* » (choisi délibérément, semble-t-il, parce qu'il ne désigne pas un objet déterminé) se note, communément, depuis le XVIe siècle, $x$. Cette lettre de l'alphabet latin désignait (souvent) jusqu'au XXe siècle l'inconnue de l'équation mais aussi l'indéterminée du polynôme ; actuellement on désigne (souvent) cette dernière par X, pour la distinguer de l'inconnue.

[16] Aristote (384-322 av. J-C) énumère les genres de la « *quantité continue* » *: la ligne, la surface, le corps, le temps et l'espace* (le lieu) (Catégories, 6).

(pouvant être exprimées par des nombres ou des fractions de nombres[17]) des grandeurs non rationnelles[18]. Euclide avait consacré à l'étude de ce dernier type de grandeur, le plus long des livres des *Éléments* et l'un des plus difficiles, le Livre X. Ce dernier commence par deux propositions dont le but est de mettre l'accent sur la différence essentielle entre les *nombres*[19] et les *grandeurs* ; cela pourrait indiquer qu'Euclide voulait souligner, dès le début, l'impossibilité d'appliquer aux « *grandeurs* » -qui ne sont pas des nombres- les opérations de l'arithmétique (science des nombres, qu'il a exposée dans les Livres VII, VIII, et IX). Or, Ce mathématicien possédait un outil de démonstration important, à savoir la géométrie qu'il a construite sur des bases solides dans le livre I et enrichie dans les Livres II-VI. Son langage, son style et toutes ses démonstrations dans le livre X sont géométriques.

Il en va de même pour le Livre II des *Éléments*. Considérer, comme l'avaient fait certains grands historiens des sciences, que ce livre constitue le début de la géométrie algébrique[20], est une erreur qu'on pourrait justifier par le manque d'informations historiques sur les mathématiques écrites en arabe.

Nous ne trouvons aucune opération arithmétique sur les grandeurs chez Euclide. Ce mathématicien a, ainsi, respecté les normes de la tradition scientifique grecque, qui sépare les disciplines entre elles et interdit l'application des opérations de l'une à l'autre.

### 3. 1. « Addition de grandeurs » et « multiplication d'une grandeur par un nombre ».

Il est vrai qu'Euclide parle de la somme de deux grandeurs. Mais, par leur somme, il entend leur juxtaposition c'est-à-dire la grandeur représentée par le segment de droite résultant de la jonction rectiligne des deux segments qui les représentent. La soustraction est

---

[17] "*Le nombre*" dans la tradition grecque est un nombre entier naturel ( $\neq 0$ et $\neq 1$ ).

[18] Comme, par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré de côté l'unité (de longueur) ou la circonférence d'un cercle de diamètre l'unité.

[19] Les grandeurs irrationnelles n'ont pas été considérées comme « nombres » avant le XIX^e^ siècle.

[20] Voir les notes du §2, plus haut.

l'opération inverse : la disjonction (c'est-à-dire l'opération qui consiste à retrancher du plus grand segment une partie égale au plus petit). Quant aux propos d'Euclide concernant la « *multiplication* » des grandeurs (ou les multiples d'une grandeur), il est clair qu'ils apparaissent dans le contexte de la comparaison de deux grandeurs, dans les deux premières définitions du Livre V :

**Définition V.1 :** *Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande*. [Peyrard, Vol. 1, p. 235].[21]

**Définition V.2 :** *Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite*. [Peyrard, Vol. 1, p. 235].

Il ne s'agit donc pas de la multiplication d'une grandeur $x$ par un nombre $n$ pour obtenir un produit qui est une grandeur (du même type) $nx$. Or, Euclide aurait pu -s'il en avait l'intention, ou si la tradition mathématique grecque permettait de faire la multiplication de deux grandeurs non numériques- s'exprimer en disant explicitement que le produit d'une grandeur par un nombre est une grandeur de la même espèce, comme cela a été fait plus tard dans la tradition arabe[22]. D'ailleurs, il a lui-même été bien explicite en parlant de la multiplication d'un nombre par un autre nombre, dans les définitions 16 et 17 du Livre VII :

**Définition VII.16 :** *Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit* [Peyrard, Vol. 1, p. 383].

**Définition VII.17 :** *Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan ; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit* [Peyrard, Vol. 1, p. 383].

---

[21] Dans la numérotation des définitions ou des propositions, le chiffre romain indique le numéro du Livre des *Éléments* et le chiffre arabe indique celui de la définition ou= =de la proposition dans ce livre. Ainsi, par exemple la définition V.1 est la définition 1 du livre V des *Éléments.*

[22] Comme c'était exprimé par Abū-Kāmil, et plus tard par al-Karajī (voir [Farès, 2017 , ch. IV et les notes du § 3. 2, ch. I]).

Il est clair que la multiplication de deux grandeurs (continues) ne peut pas se faire de cette façon, c'est-à-dire au sens de la proposition VII.16. [23]

Dans la suite, nous donnons à titre d'exemples, les énoncés de quelques propositions des *Éléments*, qui ont été interprétées algébriquement et considérées comme des propositions utilisant le produit d'un nombre par une grandeur ou le produit de deux grandeurs non numériques. La seule lecture des énoncés tels qu'ils étaient écrits par Euclide, montre l'exagération de telles interprétations et leur éloignement de l'esprit du texte.

**Proposition V.1 :** *Si l'on a tant de grandeurs qu'on le voudra, égales, en nombres, à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes* [Peyrard, Vol. 1, p. 239].

Elle a été interprétée, même dans des livres de recherche, comme suit :

**V.1 :** $m.(x_1 + x_2 + ... + x_n) = m.x_1 + m.x_2 + ... + m.x_n$ ,

(où, -dans la suite aussi- $m$ et $n$ désignent des nombres entiers et les lettres $x_i$, $x$, $y$, des grandeurs). Une telle interprétation veut dire que cette proposition exprime la distributivité de la multiplication de grandeurs par les nombres, par rapport à l'addition des grandeurs.

**Proposition V.2 :** *Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde, que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde, que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième* [Peyrard, Vol. 1, p. 241].

Interprétée algébriquement, cette proposition s'écrit :

---

[23] Plus tard, l'algèbre, depuis al-Khwārizmī, a permis la multiplication de deux grandeurs quelconques l'une par l'autre : les premiers algébristes ont représenté le produit de deux longueurs par une surface (celle du rectangle dont les côtés représentent ces deux longueurs), et le produit d'une longueur par une surface, par un volume. On n'a pas tardé (à partir d'Abu Kāmil) à utiliser des puissances de la « chose » allant jusqu'à la huitième. Plus tard, à partir d'al-Karajī (11$^{e}$ s.), les puissances de la « chose » allaient jusqu'à l'infini.

**V.2 :** $(m+n).x = m.x + n.x$ ;

elle aurait alors signifié que la multiplication des grandeurs par les nombres est distributive par rapport à l'addition des nombres.

**Proposition V.3 :** *Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième, le multiple de la première sera, par égalité, le même multiple de la seconde, que le multiple de la troisième l'est de la quatrième* [Peyrard, Vol. 1, p. 243].

Interprétée algébriquement, cette proposition s'écrit :

**V.3 :** $m.(n.x) = (m.n).x$ ;

Elle signifie alors que la multiplication des grandeurs par les nombres vérifie la propriété de l'associativité mixte.

Un argument supplémentaire qui joue contre de telles interprétations est le fait que la multiplication des nombres a été introduite par Euclide dans le Livre VII, bien après les propositions du Livre V.

**3. 2. « Produit de deux grandeurs ».**

Euclide n'a pas parlé du produit de grandeurs, ni du produit de (segments de) lignes droites par lesquels il représentait les grandeurs. Ce n'est que bien plus tard qu'on avait interprété ce qui était pour lui « *le rectangle contenu sous deux* (segments de) *lignes droites* », comme étant « *le produit* » de ces deux segments de droite. Voici, quelques propositions du Livre II, accompagnées de leurs interprétations algébriques qui sont manifestement anachroniques.

**Proposition. II.1 :** *Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous*[1] *ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre* [Peyrard, Vol. 1, p. 84].

Elle a été interprétée comme suit :

**II.1 :** $x.(y_1 + y_2 + ... + y_n) = x.y_1 + x.y_2 + ... + x.y_n$ ,

où *x* et les lettres indexées désignent des segments de droite.

**Proposition II.2:** *Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite totale et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au quarré de la droite entière* [Peyrard, Vol. 1, p. 85].

Elle a été interprétée comme suit :

**II.2 :** $x.(x-y)+x.y=x^2$,

où *x* et *y* sont des segments de droite.

**Proposition II.8 :** *Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, avec le quarré du segment restant, est égal au quarré décrit avec la droite entière et ledit segment, comme avec une seule droite* [Peyrard, Vol. 1, p. 99].

Elle a été interprétée comme suit :

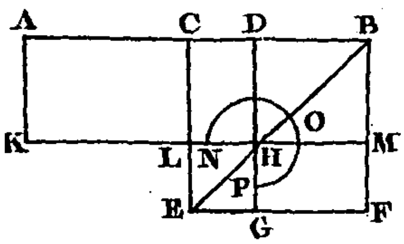
**II.8 :** $4x.y+(x-y)^2=(x+y)^2$.

Les démonstrations sont (comme dans tout le livre II) purement géométriques. Nous croyons qu'il est inutile d'en reprendre un exemple, ici.

**3. 3. Résolutions des différents types d'équations du second degré.**

Les propositions II.5 et II.6 des *Éléments*, interprétées algébriquement, pourraient fournir la résolution des trois types d'équation trinôme du 2e degré[24].

**Proposition II.5 :** *Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière, pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite*. (Traduction selon B. Vitrac, [Vitrac, 1990, vol. 1], voir aussi [Peyrard, Vol. 1, p. 93]).




[24] Il s'agit des types IV, V, VI, suivants (d'après le classement d'al-Khwārizmī, et après la division par le coefficient de $x^2$) :

(IV) : $x^2+bx=c$ ; (V) : $x^2+c=bx$ ; (VI) : $x^2=bx+c$ ;

où *b* et *c* sont des nombres rationnels positifs. La multitude des types d'équation du 2e degré vient du fait que les nombres négatifs étaient ignorés par al-Khwārizmī.

Euclide utilise pour la démonstration, la figure ci-haut où *AB* est la ligne divisée en deux parties non égales au point *D*, et en deux parties égales au point *C*, son milieu. Il prend $DB = DH$ et $LH = HG = CD$ , Il démontre géométriquement cette proposition, c'est-à-dire que la somme du rectangle $ADHK$ , dont les côtés sont AD et BD, et du carré construit sur CD (qui est égal au carré $LHGE$ est égale au carré construit sur la moitié de AB, qui est le carré $BCEF$ .

Certains historiens ont retrouvé dans cette proposition la résolution de l'équation :

$$x^2 + b^2 = ax \ ,$$

qui est une équation du type V selon le classement d'al-Khwārizmī.

En effet, cette équation est équivalente à :

$$\text{(E)} \quad x.(a-x) = b^2 .$$

Si on interprète algébriquement la proposition II.5 en posant $AB = a$ et $BD = x$ , on a $AD = a - x$ , et la surface du rectangle $ADHK$ est égale à $x.(a-x) = ax - x^2$ , et celle du carré $LHGE$ à $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ ; alors, la proposition II.5 s'écrit:

$$x.(a-x) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 ,$$

Ou aussi,

$$x.(a-x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 ,$$

et, l'équation (E) est donc équivalente à:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = b^2$$

et à la relation :

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$$

(d'où la condition $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 = \frac{a^2}{4} - b^2 \geq 0$), alors on a :

$$\left(\frac{a}{2} - x\right) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} \text{ ou } \left(x - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

c.à.d. : $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$ .

Proposition II. 6 : *Si une ligne droite est coupée en deux partie égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite* [Peyrard, Vol. 1, p. 93].

Lue algébriquement, en posant $b$ la *droite* et $x$ la *droite joutée,* cette proposition s'écrit : $x.(b+x) + \frac{b^2}{4} = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$ ; on voit facilement alors qu'elle offre alors une solution de l'équation du second degré du type (IV) :

$$\text{(IV)} : x.(b+x) = c \ .$$

De même, en posant $b$ la *droite* et $x$ la *droite avec la droite ajoutée* (ie. $x-b$ la *droite joutée*), cette proposition s'écrit : $x.(x-b) + \frac{b^2}{4} = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$ ; elle offre alors une solution de l'équation du second degré du type (VI) :

$$\text{(VI)} : x.(x-b) = c \ .$$

Il est clair que de telles interprétations (algébriques) sont tout à fait correctes dans notre mathématique actuelle, comme il est clair aussi qu'elle est étrangère à celle d'Euclide et à son projet qui est essentiellement géométrique.

Notons enfin que ce que nous venons d'avancer ne contredit pas le fait que la géométrie euclidienne soit restée longtemps après al-

Khwārizmī [25] un outil efficace pour justifier les algorithmes de résolution et les propositions algébriques.

***

## Bibliographie


Anbouba, A. 1978. “L’algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles – Aperçu général”. *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Bellosta, H. 2010. “La réception de la science arabe en Europe”, dans *Encyclopédie des relations sociales entre le monde islamique et l’Occident*, supervisée par Samir Sleimane, (Téhéran 2010). Publié aussi sur le site de l'Equipe d'Etude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe: www. histosc.com.

Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Seuil, Paris.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement axiomatique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2016. *Commentaire du Livre X des Éléments d’Euclide, par Abū Ja‘far al-Khāzin*. Éditions de l’Université Libanaise, Beyrouth..

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l’algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

Heath, T. 1956. (Sir Thomas L. Heath). *The thirteen books of EUCLID’S ELEMENTS*, 2nd edition, 3 vol. Dover New York.

Itard, J. 1984. *Essais d’histoire des Mathématiques, introduites et réunis par R. Rashed.* Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

Kouteynikoff, O., Loget, F., Moyon, M. 2013. Corpus des Editions Renaissantes des Eléments d’Euclide (1482-1606), Responsables du corpus : Caractéristiques principales de l'édition : *www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?article1066*

Peyrard, F. 1814, 1816, 1818. *Les œuvres d’Euclide en grec, en latin et en français*, 3 tomes : (vol. 1 : Livres I-VII, vol. 2 : Livres VIII-X, vol. 3 : Livres XI-XIII), Paris. On peut le retrouver sur internet (http ://books.google.com/). On peut consulter aussi le site de « l’Equipe d’Etudes et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe » : www.histosc.com.


[25] Cf. [Farès, 2017, ch. III, §2].

Rashed, R. 1984 (1). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.
Rashed, R. 1984 (2). *Diophante : Les Arithmétiques, Tome III : Livre IV*. “Collection des Universités de France”, Les Belles Lettres, Paris.
Rashed, R. 1984 (3). *Diophante : Les Arithmétiques,Tome IV : Livres V, VI, VII*. “Collection des Universités de France”, Les Belles Lettres, Paris.
Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre,* Blanchard, Paris.
Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.
Taton, R. (sous la direction de), 1957. *Histoire générale des sciences,* vol. 1, "*La science antique et médiévale*", sous la direction de P.U.F, Paris..
Vitrac, B. 1990-2001. *Euclide d’Alexandrie. Les Éléments*, vol. 1 : 1990, vol. 2 : 1994, vol. 3 : 1998, vol. 4 : 2001. PUF, Paris.
Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII$^{e}$-XV$^{e}$ siècle),* Vrin, Paris.