أقليدس والجبر

بقلم نقولا فارس: nfares55@hotmail.com (٢٢-١-٢٠١٨)
"فريق الدراسة والبحث في التقليد العلمي العربي"
(الجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة)

هذه الدراسة مقتطعة من الفصل الأوّل من كتاب: "رسالة أبي جعفر الخازن في تفسير الكتاب العاشر من أصول أقليدس"، منشورات الجامعة اللبنانيّة، بيروت، ٢٠١٦، وكتاب: "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت، ٢٠١٧، لكاتب هذا المقال.

١. لمحة عن مؤلَّف "الأصول" لأقليدس.

١-١. مقدّمة.

قد لا يجد المتعاملون مع الرياضيّات أيّ داعٍ للتذكير بأهميّة كتاب "الأصول" لأقليدس (حوالى العام ٣٠٠ ق.م)، فهي بالنسبة إليهم أمر بديهي، قيل فيها الكثير[١] ويبقى القول مهما بلغ، دون وصفها. يدلّ على تلك الأهميّة الطبعات التي أجريت له والتي لا تضاهيه في عددها سوى الكتب العائدة للأديان الأكثر انتشاراً في الأرض. هذا المؤلّف الضخم، الذي وُضِع، بحسب الرأي الغالب للمؤرّخين، لتدريس الرياضيّات في "مدرسة الإسكندريّة" في بداية القرن الثالث ق. م، بقي يستخدم لهذه الغاية منذ ذلك الزمن وحتّى منتصف القرن العشرين، مشكّلاً الركن الأساسي في تكوين العلميّين والرياضيّين، كبارهم وصغارهم. ولم تُدخِل الرياضيّات "العصريّة" سوى تعديلات، في الشكل فقط، على تحديداته ومبرهناته. ولا تزال إلى الآن أقسام أساسيّة منه مُعتمدة في مناهج إعداد المدرّسين في المرحلة الثانويّة في كافّة بلدان العالم. ولم

---

[١] ينقل الغلاف الداخلي لكتاب السير توماس هيث [Heath, 1956]، رأي الموسوعة البريطانيّة، Encyclopaedia Britannica: "لم يُكتب بعد النصّ الذي بإمكانه الحلول محلّ كتاب أقليدس ولن يُكتب، على الأرجح".

ينتقص من أهميّته اكتشافُ الهندسات اللاأقليديّة في القرن التاسع عشر، وهو اكتشاف يعود الفضل الأساس في حدوثه لمناقشة تحديدات الكتاب الأوّل منه ومصادراته، وبالذات المصادرة الخامسة[٢].

حدثت الترجمة الأولى (المعروفة) لـ"الأصول"، إلى العربية، منذ بداية النشاط العلمي في ما يسمّى بالـ"العصر العربي". قام بتلك الترجمة في عهد هرون الرشيد (٧٧٨-٨٠٩)، الحجاج بن يوسف بن مطر (٧٨٩ – ٨٣٣؟)، زميل الخوارزمي في مؤسّسة "بيت الحكمة" في بغداد. توالت بعد ذلك وتعدّدت الترجمات والشروح والصيغ الجزئيّة والكليّة، بالعربيّة، لذلك المؤلّف الضخم حتّى منتصف القرن الثالث عشر للميلاد[٣]. وبقي مؤلّف "الأصول" منذ القرن الثاني عشر، وحتّى السادس عشر، ينتقل إلى اللاتينيّة ومنها إلى اللغات الأوروبيّة، عبر الترجمات والصيغ العربيّة للأصل اليوناني. هذا لا يعني أنّ طبعاته التي تستند إلى الصيغ العربيّة قد توقّفت بعد اكتشاف النصوص اليونانيّة وتحقيقها بدءاً من ذلك العصر[٤].

١-٢. شكل كُتُب "الأصول" ومواضيعها.

يحتوي مؤلف "الأصول" على ١٣ كتاباً (أو "مقالة"، بحسب مصطلحات االرياضيّين من التقليد العربي)، وليس على ١٥ كما كان يُعتقد[٥].

[٢] يمكن عرض المصادرة بأشكال متعدّدة (متكافئة)، منها التالي: من نقطة معيّنة خارج خطّ مستقيم يمكن مد خطّ آخر وحيد موازٍ له. أمّا الأصل فهو التالي: إذا قطع خطّان مستقيمان خطّاً مستقيماً ثالثاً فإنّهما سيلتقيان من الجهة التي يقيمان مع ذلك الخط زاويتين مجموعهما أقلّ من مجموع زاويتين قائمتين.

[٣] يقدّم كتاب نقولا فارس [فارس، ٢٠١٦، ص. ١١-٢٠] لائحة (غير نهائيّة) بتلك الترجمات والصيغ.

[٤] راجع لائحة طبعات "الأصول " في عصر النهضة: [Kouteynikoff, loget et Moyon, 2013] و[فارس، ٢٠١٦، ص. ١٢-٢٠].

[٥] ألحق الكتابان بـ"الأصول" منذ العهود القديمة. الكتاب ١٤، الذي يعالج مسائل في متعددات السطوح المنتظمة، يعود إلى هيبسبكليس (Hypsiclès) من القرن الثاني ق.م. أما الكتاب ١٥ فيعود إلى القرن السادس الميلادي لأحد تلامذة إيزويدور (Isidore de Milet) مهندس كنيسة آيا صوفيا في القسطنطينيّة.

تأخذ كتب "الأصول" عامة الشكل نفسه؛ فباستثناء بعض الكتب، تتصدر كل كتاب مجموعة من التحديدات؛ أمّا الكتاب العاشر فيحتوي ثلاث مجموعات من التحديدات، كل منها معطاة في بداية جزء من أجزائه الثلاثة، إضافة إلى تحديدات أخرى. الكتاب الأول يحوي، إضافة إلى التحديدات مجموعة من المصادرات ومجموعة من المسلمات. وقديماً كان يتم التفريق بين المصادرة (exigence, demande) وبين المسلمة (notion commune ou axiome). و"التحديدات" و"المصادرات" و"المسلمات" كانت تؤلف حسب أرسطو، المفاهيم الأساسية أو المبادئ الأولية لأي علم برهاني. بعد "التحديدات الأولية" تأتي "القضايا" (Propositions) وهي على نوعين: مبرهنات (théorèmes) ومسائل بناء (construction). يختلف عدد القضايا من كتاب إلى آخر، وفي كل كتاب يختلف عدد القضايا من نسخة محققة إلى أخرى.

بقيت طريقة التقديم والمعالجة للقضايا في كتاب "الأصول" النموذج الرياضي الذي يحتذى بأسلوبه إلى الآن. فمن المؤكّد أنّ البورباكيّين سمّوا مجموعتهم الشهيرة "*LES ÉLÉMENTS de mathématiques*" تيمناً بعنوان كتاب أقليدس هذا.

الكتب ١-٦ تعالج الهندسة المسطحة، الكتب ١١-١٣ تعالج الهندسة في الفراغ، الكتب ٧-٩ تعالج علم الحساب ونظرية الأعداد، الكتاب العاشر يعالج المقادير غير المنطّقة. ولكي لا نُرهِق هذه المقدّمة، سنحاول، في ما يلي من هذه الفقرة، عرض عناوين مواضيع هذه الكتب باختصار.

الكتاب الأول: (عدد التحديدات ٢٣، عدد المسلّمات ٥ عدد المصادرات ٥، وعدد القضايا ٤٩، وفي بعض التحقيقات ٤٨). تحديدات الكتاب الأول ومصادراته هي الكتلة الأهم في أسس الهندسة المعروفة الآن بالأقليدية. يتناول الكتاب المسائل الأساسية المتعلقة بـ: الخطوط (المستقيمة)، والزوايا، وزوايا المثلثات، ومقارنة الأضلع في

المثلث تبعاً لمقارنة الزوايا، وتساوي المثلثات (التطابق) وتساوي المثلثات تبعاً للمساحة، كما يتناول متوازيات الأضلاع وتساويها تبعاً للمساحة، وينتهي الكتاب بمبرهنة فيثاغورس (الشرط الضروري والكافي Théorème de Pythagore, C.N.S.).

الكتاب الثاني: (عدد القضايا ١٤، عدد التحديدات ٢). يعرف بكتاب "الجبر الهندسي"[٦] في مجموعة أقليدس. فهو يعالج عدداً من التطابقات العائدة لمقارنة مساحات المستطيلات والمربعات المبنية على أقسام من خط مستقيم أو على أحد أضلع المثلث. ينتهي هذا الكتاب بالقضية الشهيرة (II.14) التي إذا فُسّرت جبريّاً، تعود إلى حل المعادلة $x^2 = b$ هندسياً. (نُذكّر بأنّ الخوارزمي لم يعط حلّ هذه المعادلة هندسياً، وأنّ ديكارت يعطيه دون ذكر أقليدس، أمّا عمر الخيام فيعطيه استناداً إلى II.14 ويذكر أقليدس).

الكتاب الثالث: يتناول القضايا المتعلقة بالدائرة، الأوتار، الأقواس والزوايا والتماس بين الدائرة والمستقيم والتماس بين دائرتين. في هذا الكتاب ١١ تحديداً (تحديد الدائرة موجود في الكتاب الأول) و٣٧ قضية. القضية الأولى: إيجاد مركز دائرة معطاة. القضية ٣٧: قدرة نقطة خارجة عن الدائرة بالنسبة إلى الدائرة.

الكتاب الرابع: (٧ تحديدات و١٦ قضية). يتناول هذا الكتاب بناءات هندسية لمتعددي الأضلع المنتظمة المحاطة بالدائرة والمحيطة بها، التي يمكن بناؤها بالمسطرة والبركار[٧]، من المثلث إلى سداسي الأضلاع مروراً بخماسي الأضلاع ومن ثم ذي الـ ١٥ ضلعاً.

[٦] بعد إدخال عِلم الجبر (الخوارزمي القرن التاسع) أصبح من السهل جدّاً تفسير هذه المتطابقات واعتبارها حسابات جبريّة. ولكنّ هذا الاعتبار مناقض للواقع وللتاريخ.

[٧] المسبع المنتظم، مثلاً، لا يمكن بناؤه بالوسائل المسطحة (المسطرة والبركار)، لذا لانجد بناءه هنا.

الكتاب الخامس: (١٨ تحديداً و٢٥ قضية). يعالج مفهوم النسبة بين عِظمين (grandeurs) متجانسين. وهو، بنظر ج. إيتارد، أبرز الكتب الـ ١٣ وأصعبها [Itard, 1984, p. 92]. صعوبته كانت السبب في أن يكون له، على مدى العصور، العديد من الشروحات التي توضح معاني تحديداته وأبعادها. أسهمت تلك الدراسات في تطوير الرياضيّات بشكل عام، وألهمت رياضيّي القرن التاسع عشر في محاولاتهم بناء مجموعة الأعداد المنطَقة ثمّ الحقيقيّة. يتصدّر هذا الكتاب ١٨ تحديداً. وفيه ٢٥ قضية مقدمة بأناقة وبتراتبيّة منطقيّة مثاليتين (أيضاً بحسب تعبير إيتارد).

الكتاب السادس: (٥ تحديدات و ٣٣ قضية). في هذا الكتاب يطبق أقليدس النتائج النظرية للكتاب الخامس على الهندسة المسطحة، أي على الأطوال ومساحات الأشكال المؤلّفة من خطوط مستقيمة في السطح المستوي. نجد فيه دراسة لحالات تشابه المثلثات و"مبرهنة طاليس" (Th. de Thalès) ودراسة تناسب الزوايا والأقواس. وتوجد فيه القضايا المعروفة بـ "قضايا تطبيق المساحات" والتي نوقِشت بشكل خاص من قِبل العديد من الجبريين من التقليد العربي وألهمتهم في سياق التبرير الهندسي لخوارزميّات حلّ أصناف معادلات الدرجة الثانية التي أدخلها الخوارزمي.

الكتاب السابع: (٢٣ تحديداً هي التحديدات الأساسية لعلم الحساب و٣٩ قضية) (التحديد البديهي للواحد وتحديد العدد انطلاقاً من الواحد، وتحديد الأعداد الأولى، والأولى فيما بينها، وتحديد ضرب الأعداد المشاركة بين الأعداد، ...)، إضافة إلى تحديد الأعداد المسطحة (والمربعة) والمجسّمة (والمكعبة) والأعداد المتشابهة والأعداد التامة (parfaits). وبين هذه التحديدات كثير مما أُهمِل حاليّاً، مثل العدد الفردي والزوجي (الشفعي)، الفردي فرديّاً وزوجيّاً والزوجي فرديّاً وزوجيّاً، ... القضية ١ تعرض طريقة الطروح المتتالية المتبادلة الـ (Anthyphérèse) لاختبار كون عددين أوّلين

فيما بينهما، والقضية ٢تعرض ما يُعرف بـ"خوارزمية أقليدس" لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين. تعالج قضايا الكتاب خصائص الأعداد الأوّليّة والأوّليّة فيما بينها والقاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر والعلاقة بينهما وخصائص التناسب (يستنتج أقليدس خاصيّة التبادل لضرب الأعداد من خصائص التناسب: القضيّة VII. 16).

الكتاب الثامن: (لا يحتوي أي تحديد وفيه ٢٧ قضيّة). يعالج الموسط في النسبة والأعداد المسطحة المتشابهة والأعداد المجسمة المتشابهة، والأعداد التي تتوالى في تناسب متواصل أي التي تؤلّف متتالية هندسيّة. نذكر، كمثل القضيّتين ١٤: $(a^2\ div\ \ b^2 \Leftrightarrow a\ div\ \ b)$ و١٥: $(a^3\ div\ \ b^3 \Leftrightarrow a\ div\ \ b)$.

الكتاب التاسع: (لا يحتوي أي تحديد وفيه ٣٦ قضيّة). يواصل دراسة الأعداد المتشابهة المسطحة والمجسمة والتناسب المتواصل بين عددين معطيين والأعداد المربعة والمكعبة كما يتناول الأعداد الفردية والشفعية، ويعود ليتناول الأعداد التي تتوالى في تناسب. وفيه يقدّم أقليدس البرهان بالخُلف على كون الأعداد الأوّليّة لا نهاية لها، وهو البرهان الذي مازال مستخدماً في المدارس إلى عصرنا.

الكتاب العاشر.

الكتاب العاشر هو، أكبر كتب "الأصول" الثلاثة عشر من حيث الحجم (ما يقارب ربع حجم المجموعة) ومن حيث عدد القضايا (١١٥ قضية). وفي الكتاب العاشر ثلاث مجموعات من التحديدات، كل منها تتصدر قسماً من الكتاب: أربعة تتصدّر القسم الأوّل وستّة القسم الثاني وستّة تتصدّر القسم الثالث. ولكنّ هذه التحديدات الستة عشرة ليست الوحيدة، فعند نهاية القسم الأوّل هناك مجموعة من

ستّة تحديدات وعند نهاية القسم الثاني مجموعة سداسيّة أخرى، وورد تحديدان آخران في مجرى الكتاب.

أمّا من ناحية المضمون، فالكتاب العاشر يعالج أمرين أساسيّين:

١) يدرس "المشاركة" و"اللامشاركة" بين المقادير، ويُطبِّق ذلك بشكل خاصّ على الخطوط المستقيمة والمستطيلات[٨]، ويحدّد "النطق" و"اللانطق" على هذين النوعين من المقادير ويدرس عدداً من الخصائص العائدة لهذين المفهومين.

٢) يقوم بتصنيف الخطوط غير المنطقة المركبة تركيباً بالوصل (adjonction, addition, juxtaposition) أو بالفصل (soustraction, retranchement)، وهذا يعني أنّه يقَسِّم تلك الخطوط إلى فئات أو طبقات (classes).

وعندما يتحدّث أقليدس عن المقادير، إن في الكتاب الخامس أو في الكتاب العاشر (من "الأصول")، فإنّه يقصد بدون شكّ المقادير المتّصلة (التي نسبة إلى مقدار معطىً، لا يُعبّر عنها دائماً بأعداد صحيحة)، ولو لم يقل ذلك بشكل صريح. هذا ما يؤكّده بيان القضيّة الأولى من كتابه، وهي من القضايا الأساسيّة في التفريق بين المقادير المتّصلة والأعداد (الصحيحة)، ومن ثمّ القضيّة الثانية التي تُشبه نظيراً لها في مجال الأعداد في كتابه السابع (القضيّة: VII. 1).

إنّ تقديم لمحة موجزة عن قضايا الكتاب وتحديداته أمرٌ صعب. وهو كتاب صعب الفهم جدّاً. هذا على كلّ حال رأي عدد من أهمّ قارئيه عبر التاريخ[٩]. نقول

---

[٨] نبّه أنّنا، نتبع، هنا وفي ما يلي من هذا المقال المصطلحات التي استخدمها أقليدس في الكتاب العاشر، حيث يقصد بالخط المستقيم قطعة من خط مستقيم (القطعة كمقدار أي كطول) وبالمستطيل مساحته.

[٩] يقول ف. بيرارد "الكتاب العاشر غير معروف تقريباً في أوساط الرياضيّين الفرنسيّين. فهؤلاء، بشكل عامّ، يجدونه غير مجدٍ ومستعصٍ جدّاً على الفهم" [Peyrard, 1814, p. i.]. ويصف جان إيتار هذه الصعوبة بقوله: "تتطلّب قراءة هذا الكتاب من الرياضي

ذلك رغم أنّ تحديداته وبراهين قضاياه كلّ واحدة على حدة، سهلة الفهم بالنسبة إلى القارئ الملمّ بما سبقه من كتب "الأصول"[١٠].

الكتاب ١١: (٢٨تحديداً و٣٩ قضية). مع هذا الكتاب تبدأ دراسة الهندسة في الفراغ (الفضاء الثلاثي الأبعاد) (géométrie dans l'espace). التحديدات تتعلّق بتوازي الخطوط المستقيمة والسطوح وتعامدها، وزاوية (انحناء) السطحين، وانحناء خط مستقيم على سطح، والأشكال المجسّمة المتساوية والمتشابهة، والزاوية المجسمة، والمنشور، والمخروط الدائري، والكرة، والأسطوانة (الدائرية) والمخروط ومحاورها، ومتعدّدات السطوح المنتظمة المحدّبة (المحاطة بالكرة) المعروفة بـ "مجسّمات أفلاطون": والهرم (ذي الأربعة سطوح وهي مثلثات متساوية الأضلع)، والمكعب (ذي الستة سطوح وهي مربّعات)، ومثمن السطوح (وهي مثلثات متساوية الأضلع) وذي الإثني عشر سطحاً (من مخمسات منتظمة) وذي العشرين سطحاً (وهي مثلثات متساوية الأضلع). وهذه التحديدات التي تتصدّر الكتاب ١١ تخص الكتب ١١ و١٢ و ١٣، لذا فإنّ الكتب ١٢ و ١٣ لا تحوي تحديدات (أو مصادرات). يتبع هذه التحديدات ٣٩ قضية تشكل أسس نظرية الهندسة في الفضاء الثلاثي الأبعاد، في أسلوب أنيق مماثل لأسلوب الكتاب الأول.

الكتاب ١٢: يحوي هذا الكتاب ١٨ قضية ويتابع الدراسة التي بدأت في الكتاب ١١ فيعالج قضايا المساحات والحجوم. يستنتج مساحة القرص الدائري من مساحة

الحديث تحضيراً قاسياً وشجاعة مؤكّدة" [Itard, 1984, p. 10]. ويعبّر عن ذلك سيمون ستيفن (١٥٤٨-١٦٢٠ Simon Stevin,) بقوله: "أضحت قراءة كتاب أقليدس العاشر بالنسبة للكثيرين تمثّل الرعب إلى حدّ وصفها بصليب الرياضيّين؛ ... ويعتبرونها مادّة شديدة الصعوبة على الاستيعاب، لا يرون فيها أيّة فائدة ..." [Heath, 1956, vol. III, p. 9].

[١٠] للمزيد حول صعوبة الكتاب العاشر وأسبابها و للاطلاع على موجز له، راجع [فارس، ٢٠١٦، ص. ٢٥-٤٠].

المضلّع المنتظم المبني داخل الدائرة. يستخدم أقليدس في براهينه الطريقة المسمّاة "إفناء الفرق" (méthode d'exhaustion)، التي بقيت تستخدم في هذه المجالات حتّى ابتداع الحساب التكاملي بشكله الحديث ويحصل على حجم متوازي السطوح والهرم والمخروط ويبرهن أنّ حجم الكرة يتناسب مع مكعب قطرها.

الكتاب ١٣: (١٨ قضية). يبني أقليدس في هذا الكتاب الأشكال المجسمة الخمسة المنتظمة السطوح المحاطة بالكرة، والمذكورة في موجز الكتاب ١١، أعلاه : ذا السطوح الأربعة (الهرم)، والمكعب، وذا السطوح الثمانية، وذا الإثني عشر سطحاً، وذا العشرين سطحاً؛ ويقدّم بعض المبرهنات التي تعطي نسبة أقطار كلّ من هذه الأشكال إلى قطر الكرة المحيطة بها. وينهي الكتاب ببرهان أن هذه الأشكال هي الوحيدة المنتظمة التي تحيط بها الكرة.

٢. "بداية الجبر" – مصادر كتاب الخوارزمي: مسألة شائكة ورؤى غير واضِحة.

بقيت نقاشات مؤرّخي الرياضيّات تعكُس، على الأقلّ حتّى نهاية القرن العشرين، نوعاً من الحيرة، بل من الخلاف بين آرائهم، حول مسألة مصادر جبر الخوارزمي ومسألة "بداية الجبر"، وهما مسألتان مترابطتان.

عبّر عادل أنبوبا عن تلك الحيرة عندما كتب في ثمانينيّات القرن العشرين: "من موقعنا اليوم، كمشاهدين عن بعد لتاريخ الجبر عند العرب، نجِد أنّ هذا التاريخ يبدأ بحدث مفاجئ، غير متوقّع..." (قاصداً كتاب الخوارزمي الجبري) [Anbouba, 1978, p. 66]. وكتب ر. راشد عند نهاية ذلك القرن ما يوضح ذلك القول: "ويبقى السؤال التالي دون جواب: لماذا يبدو علم الجبر بالغ النضج بطرائقه رغم أنّه مولود جديد؟ وما هو السبب في أنّ هذا الإسهام –الذي توحي مظاهر عديدة منه بأنّه تتويج لنشاط سابق– يظهر، مع ذلك، كبداية أصيلة" [راشد، ١٩٨٩، ص. ٢١].

ونعتقد أنّ أ. ب. يوشكيفيتش كان يُعَبِّر عن رأي كلّ مؤرّخي الرياضيّات عندما اعتبر في الستينيّات من القرن الماضي أنّ "مسألة مصادر الخوارزمي لم تزل مسألة مفتوحة بالكامل". وفي محاولة لتلمّس مصادرٍ لجبر الخوارزمي في الرياضيّات الهنديّة، يتابع: "ولكنّ جبره (أي جبر الخوارزمي) يحتوي سلسلة من المميّزات. فلا نجد في الجبر الهنديّ أيّ شرح هندسيّ لقواعد حلّ معادلات الدرجة الثانية، ولا للعمليّات التي تستخدم المقادير الجبريّة، بينما تحتلّ هذه القواعد والعمليّات (وشرحها الهندسي) مكاناً بارزاً عند الخوارزمي". وبعد مقارنة أسلوب الخوارزمي بأسلوب "أصول" أقليدس (وبخاصّة في كتابه الثاني)، يستنتج يوشكيفيتش بحقّ أنّ "أسلوبَي التفسير والبرهان مختلفان بشكل أساسيّ عند هذين المؤلّفين. فإذا كان هناك من تأثير للجبر الهندسي عند القدماء، على الخوارزمي، فإنّ هذا التأثير لم يكن من الممكن أن يحصل إلاّ بشكل متحوِّل بعمق ويتلاءم مع متطلّبات الجبر العددي". ويضيف، من أجل التذكير بأنّ مسألة مصادر جبر الخوارزمي لم تُحسم بعد: "ولكنّ ما نقوله، ليس سوى فرضيّة لا تستند حتّى الآن على أيّ تبرير تاريخي". ومن جهة أخرى لا يعتقد يوشكيفيتش بأيّ تأثير محتمل لديوفنطس على جبر الخوارزمي معتبراً أنّ "على حدّ علمنا، أوّل الترجمات العربيّة لديوفنطس تمّت في بغداد على يد العالم المسيحي قسطا بن لوقا البعلبكي، نسبة إلى مدينة بعلبك في لبنان، والذي توفي عام ٩١٢ في أرمينيا، ومن بعد، على يد أبي الوفاء" [Youschkévitch, 1976, pp. 42 - 43].

ويلخّص عادل أنبوبا بوضوح الأفكار التي بقيت حتّى نهاية القرن العشرين قيد التداول حول تأثير التقليدَين الرياضيَّيْن اليوناني والهندي في جبر الخوارزمي: "منذ بداية القرن التاسع عشر، تضعُ المناقشاتُ الذين يعتقدون بوجود نَسَب يونانيّ في مواجهة أولئك الذين يرون أصلاً هنديّاً، ولا تتوصّل إلى نتيجة مُقنِعة" [Anbouba, 1978, p. 73]. فلئن كان أسلوب الخوارزمي يُذكّر بالأعمال الهنديّة، في ما يتعلّق بالطرائق الحسابيّة للحلول، فإنّ تبريره لهذه الطرائق، بواسطة الهندسة، ينتمي إلى أسلوب الكتاب الثاني من "أصول" أقليدس.

ولكنّ الرياضيّات اليونانيّة أو الهنديّة، ليست المصادر الوحيدة المحتملة لجبر الخوارزمي. فهذا الرياضي عاش في جزء من العالم لا بدّ أن يكون لإرث بلاد بابل وتقاليدها العلميّة حظ وافر في الاستمرار فيه، بشكل أو بآخر. لذا يجب ألّا يُستبعد تأثير إرث المنطقة وتقاليدها. و بهذا الخصوص يقول ع. أنبوبا نفسه: "لم تبدأ أصول الجبر العربي (وأيضاً أصول الهندسة اليونانيّة) بتلقّي الإيضاحات الأكثر إقناعاً، إلاّ حوالي العام ١٩٣٠، مع الفك الواسع لرموز اللوحات البابليّة". ويذهب إلى أبعد من ذلك، فيشير إلى احتمال تأثير بابلي على "حساب" ديوفنطس وعلى الكتاب الثاني من "الأصول"، وكذلك على ظهور جبر الخوارزمي ويقول: "إنّ قضايا الجبر الهندسي التي يتضمّنها كتاب "الأصول" لأقليدس، والتي تبتعد بطبيعتها وبهدفها عن المِثال الرياضي اليوناني وعن أهداف الكتاب، تأخذ على ضوء ذلك معناها الحقيقي كمنجزات غريبة (عن التقليد اليوناني). وستتوضّح كذلك الصورة المستَغرَبة لرياضيّات أَيْرُن الإسكندري ولرياضيّات ديوفنطس. وتبعاً لذلك يكون جبر الخوارزمي نوعاً من الانبعاث لهذا التيّار البابلي الذي لم تزل الظلمة الكثيفة تلفّ مسألة تطوّره وانتقاله عبر العصور" [Anbouba, 1978, pp. 73- 74].

نظنّ أنّ السبب الرئيسي لعدم اليقين هذا حول مسألة مصادر جبر الخوارزمي، هو النقص في المعطيات التاريخيّة. فالخوارزمي نفسه، لا يُشير إلى أيّ من مصادر كتابه الجبري، بينما نراه يُعبّر في عمله الحسابي بصراحة أنّه يرتكز في ذلك

الكتاب إلى نماذج هنديّة[١١]. هذا النقص ترك المجال واسعاً أمام عدد من الافتراضات والتخمينات التي تَرَسَّخَت فَشابَهت المسلّمات بسبب المكانة العلميّة لمطلقيها، وترديد تلامذتهم وخلفائهم لها دون نقاش. وكان من الطبيعي أن تتناقض هذه التخمينات فيما بينها، بسبب غياب إسنادها بشكل دقيق، وأن يحصل نوع من الخلط بين "مصادر" كتاب الخوارزمي وبين "أصول الجبر". كان من المسلّمات، مثلاً، اعتبار كتاب "المسائل العدديّة" لديوفنطس عملاً جبريّاً[١٢] أو، على الأقلّ، اعتبارُه أحد أصول الجبر، أو اعتبار الكتاب الثاني من "أصول" أقليدس بداية للجبر الهندسي[١٣]. وقيل الكثير عن الأعمال الجبريّة في الرياضيّات البابليّة[١٤]؛ ومنذ بداية القرن العشرين انتشرت أفكار ترى في بعض الأعمال الهنديّة من القرنين السادس والسابع للميلاد مصادر لكتاب الخوارزمي.

[١١] لم يصل عمل الخوارزمي الحسابي إلى عصرنا بالعربيّة. نقرأ في مستهلّ إحدى صِيَغه اللاتينيّة ما معناه: "... قرّرنا أن نعرُض طريقة العدّ عند الهنود بواسطة الرموز التسعة..." [Youschkévitch, 1976, p. 16]. وتشير كتابات أخرى للخوارزمي، بشكل أو بآخر، إلى الهند.

[١٢] يذكر ر. راشد في كتابه [راشد، ٢٠١٠، ص. ١٢٣]، عدداً من الكتب الحديثة المهمّة التي تتبنّى هذا الموقف. ونقرأ له في كتاب آخر، [راشد، ١٩٨٩، ص. ٦٣-٦٤]، أنّ بول تانّري (Paul Tannery) يعتبر أنّ الجبر العربي "لم يتجاوز المستوى الذي بلغه ديوفنطس"؛ راجع أيضاً مقال هـ. بلّوستا [Bellosta, 2010]، التي تعود إلى الصفحة ٦ من كتاب بول تانّري: *La géométrie grecque*. أنظر أيضاً [Taton, 1957, pp. 116].

[١٣] راجع ما ورد حول اعتبار هذا الكتاب كتاباً في الجبر الهندسي بدءاً من بول تانّري (Paul Tannery)، في [Dahan-Delmico et Peiffer, 1986, p. 76].

[١٤] وذهب بعض كبار مؤرّخي العلوم إلى اعتبار أنّ البابليّين "هم مخترعو الجبر"؛ أنظر، على سبيل المثال، الفصل الثاني من الكتاب: [Taton, 1957, p. 116]. وتُسهِم عناوين بعض المقالات أو الكتب بإلقاء الضباب حول بداية هذا العلم. ومن هذه العناوين "٤٠٠٠ عام من الجبر" :

4000 Jahre Algebra, Geschichte, Kulturen, Menschen. H. W .Alen; A. Djafari Naini; M. Folkerts; H. Schlosser; K. H. Schlote; H.Wussing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

وفي عام ٢٠٠٧، صدر للباحث رشدي راشد بالفرنسيّة كتاب حول جبر الخوارزمي قمنا بترجمته إلى العربيّة عام ٢٠١٠، يهدف (كما يبدو من خلال عنوانه ومحتواه)[١٥] إلى حسم مسألة بداية علم الجبر. يدرس المؤلِّف مسألة مصادر ذلك الجبر في فقرة طويلة بعنوان "قراءات الخوارزمي الرياضيّة" [راشد، ٢٠١٠، ص. ٨١–١٤٨]. أثبتت تلك الدراسة اطّلاع الخوارزمي الأكيد على "أصول أقليدس" ومن ضمنها الكتاب الثاني من هذا المؤلّف، كما أثبتت اطّلاعه على أعمال هيرون الإسكندري الهندسيّة واستخدامه لبعض مسائلها. ولكنّها من جهة أخرى، دحضت أو استبعدت نظريّات سابقة حول كون كتاب ديوفنطس المعروف بالـ"حساب" أو بالـ"مسائل العدديّة"، أحد مصادر الخوارزمي أو، حول اعتباره عملاً جبريّاً سابقاً لكتابه الجبري. واستبعدت كذلك اعتبار أعمال الرياضيّين الهنود (وبشكل خاصّ، برهمَغوبتا وأريبهَطا) من بين مصادر جبر الخوارزمي. ارتكز رشدي راشد في استنتاجاته هذه إلى دراسة كلّ من هذه الأعمال، وكان قد أشار إلى هذه الاستنتاجات بأشكال مختلفة في مقالات سابقة ([Rashed, 1984 (2), 1984 (3), 1994, ...]) وفي مداخلات غير منشورة. ولا شكّ بأنّه قصد من وراء عرضه في الفقرة المذكورة من كتابه أن يُثبِت ما أكّده في بداية كتابه وهوأنّ كتاب الخوارزمي هو "عمل تأسيسي للجبر". ومؤخّراً صدر لنا كتاب ([فارس، ٢٠١٧]) تؤكّد الفصول الثلاثة الأولى منه ولادة الجبر ،كمادّة علميّة مستقلّة عن الهندسة وعن علم الحساب، في كتاب الخوارزمي الجبري وتنفي وجود الجبر كمادّة علميّة قبل ذلك الكتاب. وكنّا قد بيّنّا في مقال سابق ([فارس، ٢٠١٥]) أنّ كتاب الخوارزمي يحوي الشكل المصادراتي الأوّل لعلم الجبر.

---

[١٥] عنوانه بالفرنسيّة: "*Al-Khwarizmi-Le commencement de l'algèbre*" (أنظر المراجع [Rashed, 2007]) ونقلناه إلى العربيّة تحت عنوان: "الخوارزمي وتأسيس علم الجبر [راشد، ٢٠١٠].

٣. الجبر و"أصول" أقليدس.

ما زال الجبر، منذ بداية تأسيسه مع الخوارزمي، وإلى يومنا، هو علم الحسابات على كثيرات الحدود وحلّ المعادلات "الجبريّة" (أو أنظمتها). والمعادلات الجبريّة هي تلك التي يكون طرفاها تعبيرين كثيري حدود. ومنذ القرن السادس عشر، ومع ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) بشكل خاصّ، واستخدام الأعداد السالبة على نطاق واسع، أخذت المعادلة الجبريّة شكلَ تعبير كثير حدود يعادل صفراً[١٦].

وقد وُلِد الجبر مع كلمة "شيء" أي مع إدخال الخوارزمي لهذه الكلمة (النَكِرة) في القاموس الرياضي، وقيامه بإجراء عمليّات علم الحساب، أي الجمع (والطرح) والضرب، على "الأشياء" وعلى كثيرات الحدود[١٧]. إنّ نقل أو مدّ تلك العمليّات من مجال الأعداد إلى مجال أوسع (مجال "الأشياء") هو مكمن عبقريّة الخوارزمي وهو ما ولّد علم الجبر.

نحاول في ما يلي من هذا المقال أن نبيّن أنّ وصف بعض قضايا كتاب "الأصول" بأنّها جبرية هو تجاوز يُلصِق بالفكر الرياضي الأقليدي أموراً لا تنتمي إليه. وكنّا قمنا في مكان آخر ([فارس، ٢٠١٧، ص. ٥٩-٧٧]) بدراسة مماثلة حول طبيعة كتاب "علم الحساب" لديوفنطس. وقد ذكرنا في نهاية الفقرة السابقة أنّ ر. راشد كان قد نفى، في دراسة حديثة، احتمال كون الرياضيّات الهنديّة تحتوي عملاً جبريّاً أو حتى كونها من مراجع جبر الخوارزمي.

---

[١٦] أي أنّها (في حال معادلة بمجهول واحد، x)، أخذت الشكل: $\sum_{i=0}^{i=n} a_i . x^i = 0$، حيث تنتمي المعامِلات a_i إلى أحد الحقول العدديّة.

[١٧] كلمة "شيء"، النكِرة، نكتبها الآن (غالباً) ومنذ القرن السادس عشر x. استمرّ هذا الحرف اللاتيني، منذ ذلك الحين وحتّى القرن العشرين، يمثّل (غالباً) المجهول في المعادلة والكائن اللامحدّد في كثيرة الحدود، ثمّ صار يشار إلى اللامحدّد في كثيرة الحدود بـ X، الصورة المكبّرة لذلك الحرف، لتمييزه عن المجهول.

صحيح أنّ أقليدس (حوالى ٣٠٠ ق.م) أدخل كلمة شبيهة إلى حدّ ما بكلمة "شيء" هي كلمة "المقدار". ورغم أنّه استخدم هذه الكلمة دون أن يحدّدها أو يشرحها بشكل صريح، إلاّ أنّ سياق عمله في الكتب الخامس، والسادس، والعاشر من "الأصول"، يُظهر أنّه يعتبر "المقدار" تعبيراً عن "الكميّة المتّصلة". ومنذ ما قبل أقليدس، عرف الرياضيّون مفهوم الكميّة المتّصلة[١٨] كما عرفوا الفرق بين المقادير المنطَقة (التي يمكن التعبير عنها بأعداد صحيحة، أو بكسور أعداد[١٩]) والمقادير "غير المنطَقة"[٢٠]. وقد خصّص أقليدس الكتاب العاشر من "الأصول" لدراسة بعض أنواع هذه المقادير، هو أطول كتب "الأصول" وأحد أصعبها.

تتصدّر الكتاب العاشر من "الأصول" قضيّتان أساسيّتان في التفريق بين المقادير المتّصلة والأعداد[٢١]. ولا بدّ أنّ يكون البدء بهاتين القضيّتين إشارة من أقليدس إلى أنّ من غير الممكن تطبيق علم الحساب (أو علم العدد الذي أدخله في كتابه السابع) على المقادير التي ليست أعداداً. ولكن كان بحوزة أقليدس أداة برهانيّة مهمّة في هذا المجال هي الهندسة، وهي العلم الذي بناه على أسس رياضيّة صلبة في الكتاب الأوّل من الأصول، وأغناه في الكتب ٢-٦. وكانت كلّ براهين كتابه العاشر، وأسلوبه، ولغته تنتمي إلى الهندسة[٢٢].

---

[١٨] عدّد أرسطو (٣٨٤-٣٢٢ ق. م) أنواع الكميّة المتّصلة الخمسة: الخط (الطول)، السطح (المساحة)، الجسم (الحجم)، الزمان والمكان (قاطيغوريا، ٦).

[١٩] العدد في التقليد الرياضي اليوناني هو العدد الصحيح الطبيعي (أي الموجب، غير الصفر. وفي مصطلحاتهم لم يكن الواحد أيضاً عدداً).

[٢٠] مثل قطر المربّع الذي ضلعه الوحدة، أو طول الدائرة التي شعاعها الوحدة.

[٢١] في كلّ حال لم تأخذ المقادير المتّصلة صفة العدد قبل القرن التاسع عشر، مع بناء مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

[٢٢] للمزيد حول طبيعة الكتاب العاشر، راجع [فارس، ٢٠١٦، ص. ٢٥-٤٠].

هذا القول ينطبق أيضاً على الكتاب الثاني من "الأصول". إنّ تفسير "الكتاب الثاني" على أنّه كتاب في الجبر الهندسي، بحسب بعض مؤرّخي الرياضيّات، ومنهم من له باع طويل في تاريخ العلوم[٢٣]، هو خطأ كانت تبرّره حداثة هذه المادّة العلميّة وندرة الأبحاث فيها وخاصّة فيما يتعلّق بالأدبيّات الرياضيّة التي كُتبت بالعربيّة.

ولا نجد عند أقليدس أيّ عمليّات حسابيّة على "المقادير"، فبقي عنده علما الحساب والهندسة منفصلين، وبقي التقليد اليوناني في فصل أجناس العلم أحدها عن الآخر، مُتَّبَعاً.

٣-١. جمع المقادير وضرب مقدار بعدد.

وصحيح أيضاً أنّ أقليدس يتكلّم عن مجموع المقادير. إلاّ أن الجمع عنده كان الوصل الهندسي، بمعنى أنّ جمع مقدارين هو المقدار الهندسي الذي يمثّله الخطّ الناتج عن وصل الخطّين الممثلين لهذين المقدارين عند طرفيهما (على استقامة). والطرح هو العمليّة العكسيّة أي "الفصل" (أي أن يُفصَل من الخطّ الأكبر، قسم مساوٍ للأصغر). أمّا كلامه عن مضاعفة المقادير (أي عن أضعاف مقدار ما) فأتى في سياق مقارنة مقدار بآخر في التحديدين الأوّلين من الكتاب الخامس من "الأصول":

التحديد V.1: "يكون مقدار جزءاً من مقدار، الأصغر من الأكبر، عندما يقيس الأصغرُ الأكبرَ" [Peyrard, Vol. 1, p. 235] [٢٤]؛

---

[٢٣] أنظر ملحوظات الفقرة ٢، أعلاه.

[٢٤] في ترقيم التحديدات والقضايا، يدلّ الرقم الروماني على رقم كتاب أقليدس في مجموعة "الأصول"، أمّا الرقم "العربي" فيدلّ على رقم التحديد أو القضيّة من هذا الكتاب. فالتحديد V.1 هو، على سبيل المثال، التحديد

التحديد V.2: "يكون المقدار الأكبر مضاعَفاً (بمعنى أضعافاً) من المقدار الأصغر، إذا كان الأكبرُ يُقاس بالأصغر" [Peyrard, Vol. 1, p. 235].

لذا لا يُفهم من كلامه أبداً أنّه يعني بمضاعفة مقدار ما، x، أنّه يضربه بعدد ما، n، ليحصل على مقدار آخر هو nx. وكان باستطاعته ذلك لو أراد، أو لو كان التقليد الرياضيّ اليونانيّ يسمح بضرب مقدارين غير عدديّين أحدُهما بالآخر، وأن يكون صريحاً في القول أنّ ضرب عدد في مقدار هو مقدار من النوع نفسه، كما فعل الرياضيّون من التقليد العربي فيما بعد [٢٥]. فهو نفسه (أي أقليدس) كان صريحاً جدّاً عندما تكلّم عن ضرب الأعداد (أي ضرب عددين، أحدهما بالآخَر) في التحديدين ١٦ و ١٧ من الكتاب السابع، وهما:

التحديد VII.16: "يقال عن عدد أنّه يضاعف عدداً، عندما يضاف (يُجمَع) العدد المضاعَف (إلى نفسه) بعدد المرّات التي توجد فيها الوحدة (أي الواحد) في العدد الذي يضاعفه، ويحصل من ذلك عددٌ" [Peyrard, Vol. 1, p. 383]؛

التحديد VII.17: "عندما يضاعِف عددان، أحدهما الآخر، يسمّى (العدد) الحاصل (عدداً) سطحيّاً، ويسمّى العددان المضاعفان ضلعي (العدد) الحاصل" [Peyrard, Vol. 1, p. 383].

ولاحقاً استخدمت في اللغة العربيّة عبارة "يضرب عددٌ عدداً" بمعنى "يضاعف عددٌ عدداً"، و استُخدمت كلمة "ضَرْب ..." بمعنى "مضاعفة عددٍ لعددٍ

الأوّل من الكتاب الخامس من "الأصول". يعني أقليدس بعبارة "يقيس الأصغر الأكبر"، أو "الأكبر يقاس بالأصغر"، أنّ المقدار الأكبر يساوي الأصغر عندما يضاف هذا إلى نفسه عدداً من المرّات.

[٢٥] بدءاً من أبي كامل ثمّ الكرجي؛ راجع [فارس، ٢٠١٧، الفصل الرابع ملحوظات الفقرة ٣-٢ من الفصل الأوّل].

آخر، أو أن يكون عددٌ أضعافاً من عدد آخر"؛ هذا فيما يتعلّق بضرب الأعداد. أمّا تحديد ضرب "المقادير" (المتصلة)، فهو أمر غير ممكن بهذه الطريقة (بمعنى المضاعَفة)، أي بواسطة تحديد مشابه للتحديد **VII.16**، السابق[٢٦].

ونورد هنا عيّنة من نصوص قضايا كتاب "الأصول"، جرى تفسيرها على أنّها تَستخدِم ضرب الأعداد بالمقادير، أو ضرب مقدارين غير عدديّين، أحدهما بالآخر. ولو صحّ ذلك لكانت هذه القضايا جبريّة بالفعل، لأنّها تنقل عمليّة الضرب من عمليّة داخليّة في مجال الأعداد إلى مجال أوسع. إنّ مجرّد قراءة هذه النصوص بلغتها الأصليّة كما قدّمها أقليدس يُظهر مدى المبالغة في تلك التفسيرات الجبريّة وابتعادها عن نصّ أقليدس. نُشير إلى أنّ ما سيرِد بين قوسين في ترجمة نص القضايا هو إضافة من عندنا، قمنا بها ليتوضّح المعنى في الترجمة، التي أردناها شبه حرفيّة، للأمانة. هذه الترجمة شبه الحرفيّة تزيد في صعوبة فهم القارئ للنص، ويمكن الاطّلاع على النَص الفرنسي (المترجَم مباشرة من اليونانيّة) للتحديدات أو القضايا من كتاب "الأصول" التي وردت أو سترد هنا، في [Farès, 2017, ch. II].

القضيّة V.1[٢٧]: "إذا كان لدينا ما شئنا من المقادير، المتساوية، بالعدد، مع مقادير أخرى، بحيث يكون كلّ واحد من (مجموعة المقادير) الأولى أضعافاً، بالمضاعفة

[٢٦] بعد أن أُدخِلَ عِلم الجبر، مع الخوارزمي، أصبح ضرب المقادير على اختلافها ("الأشياء") ببعضها، أمراً مشروعاً. اعتبر الجبريّون الأوائل أنّ ضرب طول بطول يتمثّل هندسيّاً بمساحة (مساحة المستطيل المحاط بهذين الطولين)، وضرب مساحة بطول يتمثّل بحجم. ولكن سرعان ما تمّ التعامل مع قوى المقدار أو "الشيء" حتّى القوّة الثامنة (بدءاً من أبي كامل) ثمّ إلى ما لا نهاية، بدءاً من الكرجي.

[٢٧] هنا وفي ما يتبع يشير الرقم الروماني إلى رقم الكتاب من مجموعة كتب "الأصول" (وهي ١٣ كتاباً) والرقم العربي إلى رقم القضيّة من الكتاب المذكور؛ هنا مثلاً، يشير الترقيم V.1 إلى القضيّة الأولى من الكتاب الخامس من "الأصول".

نفسها، من كلّ واحد من (مجموعة المقادير) الثانية، فسيكون (أيّ) واحد من الأولى مضاعَفاً من الواحد من الأخرى، بنفس مضاعَفة مجموع (المقادير) الأولى من مجموع (المقادير) الثانية" [Peyrard, Vol. 1, p. 239].

وقد جرى تأويلها (ويجري إلى الآن في عدد من المراجع البحثيّة وكتب التدريس) كالتالي:

V.1 $m.(x_1+x_2+...+x_n)=m.x_1+m.x_2+...+m.x_n$ **:**

وهذا التأويل يعني أنّ ضرب المقادير بالأعداد توزيعي بالنسبة إلى جمع المقادير. (هنا، وفيما يلي، يرمز الحرفان m و n إلى عددين وترمز الحروف x_i و x و y إلى مقادير).

القضيّة V.2: "إذا كان (المقدار) الأول مضاعفاً من الثاني مثل مضاعفة الثالث من الرابع، وكان الخامس مضاعفاً من الثاني مثل مضاعفة السادس من الرابع، سيكون مجموع الأول والخامس مضاعفاً من الثاني مثل مضاعفة مجموع الثالث والسادس من الرابع" [Peyrard, Vol. 1, p. 241].

وقد جرى تأويلها كالتالي:

V.2 $(m+n).x=m.x+n.x$ **:**

وهذا التأويل يعني أنّ ضرب الأعداد بالمقادير توزيعي بالنسبة إلى جمع الأعداد.

القضيّة V.3: "إذا كان (المقدار) الأوّل مضاعفاً من الثاني مثل مضاعفة الثالث من الرابع، وإذا أخذنا مقداراً مضاعفاً من الأوّل وآخر من الثالث، بالمضاعفة نفسها، يكون مضاعَف الأوّل، بالمساواة، مضاعَفاً من الثاني مثل مضاعفة مضاعَف الثالث من الرابع" [Peyrard, Vol. 1, p. 243].

وقد جرى تأويلها كالتالي:

V.3. $m.(n.x)=(m.n).x$

وهذا التأويل يعني أنّ ضرب الأعداد بالمقادير يتمتّع بخاصيّة "التجميع المختلط" (Associativité mixte).

في كلّ حال، هناك عنصر مهمّ في إثبات خطأ مثل تلك التأويلات هو أنّ قضايا الكتابين الثاني أو الخامس تسبق تحديد الأعداد ومضاعفتها (أو ضربها) التي أعطاها أقليدس في كتابه السابع.

٣-٢. "ضرب المقادير".

لم يتحدّث أقليدس بتاتاً عن ضرب المقادير (بعضها بالبعض الآخر)، ولا عن ضرب "الخطوط" (أي القطع من خطوط مستقيمة) التي تمثّل المقادير. أمّا تفسير ما سمّاه "السطح المستطيل المحتوى تحت خطّين مستقيمين" باعتبار أنّه ضرب هذين الخطّين (أو هاتين القطعتين المستقيمتين)، فهو تفسير جبري أتى بعد أقليدس بقرون. ونقدّم فيما يلي من هذه الفقرة عيّنة من نصوص بعض قضايا الكتاب الثاني من "الأصول"، ونصحب هذه النصوص بتفسيرها الجبري الذي يظهر جليّاً كونه تفسيراً مخالفاً لقواعد السياق الزمني.

القضيّة II.1: "إذا كان لدينا خطّان وكان أحدهما مقطّعاً إلى ما شئنا من أجزاء يكون المستطيل المحتوى تحت هذين الخطّين مساوياً للمستطيلات المحتواة تحت الخطّ الذي لم يُقَطّع أبداً وتحت كلّ واحد من قِطَع الآخَر" [Peyrard, Vol. 1, p. 84].

وقد جرى تأويلها كالتالي:

II.1 : $x.(y_1+y_2+...+y_n)=x.y_1+x.y_2+...+x.y_n$

حيث تشير الأحرف المرقّمة وx إلى خطوط.

القضيّة II.2: "إذا قُطِع خطّ مستقيم كيفما شئنا يكون المستطيلان المحتويان تحت الخط كلّه وتحت إحدى القطعتين و(تحت) الأخرى، مساوياً لمربّع الخطّ بكامله" [Peyrard, Vol. 1, p. 85].

وقد جرى تأويلها كالتالي:

$$\text{II.2}: x.(x-y)+x.y=x^2$$

حيث تشير الأحرف إلى خطوط.

القضيّة II.8: "إذا قُطِع خطّ مستقيم كيفما اتُّفِق، يكون (مجموع) المستطيل المحصور تحت الخط كلّه وإحدى القِطعتين، أربع مرّات، ومربّع القطعة الباقية، مساوياً للمربّع الذي يُرسم من الخطّ كلّه والقِطعة المذكورة إذا اعتبرا خطّاً مستقيماً واحداً" [Peyrard, Vol. 1, p. 99].

وقد جرى تأويلها كالتالي:

$$\text{II. 8}: 4x.y+(x-y)^2=(x+y)^2.$$

نشير إلى أنّ براهين أقليدس للقضايا المذكورة هي براهين هندسيّة بحتة. ونظنّ أنّ تبيان ذلك عن طريق إعادة عيّنة من البراهين غير ضروري وأنّه يزيد من طول هذه الفقرة.[٢٨]

٣-٣. حلّ أنواع معادلات الدرجة الثانية.

إذا قُرئت القضيّتان الخامسة والسادسة من الكتاب الثاني من "الأصول" على ضوء الجبر تُعطيان حلاًّ لأصناف معادلات الدرجة الثانية ثلاثية الحدود[٢٩].

القضيّة II.5: "إذا قُطِع خطّ مستقيم، إلى قطعتين متساويتين و(إلى قطعتين) غير متساويتين، يكون المستطيل المحتوى بالقطعتين غير المتساويتين، مأخوذاً مع المربّع

---

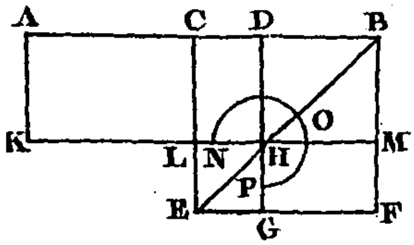
[٢٨] على كلّ حال، براهين هذه القضايا ورسم الأشكال الهندسيّة العائدة لها سهل جدّاً، ويمكن، لمزيد من الإيضاح مراجعة كتاب بيرارد (F. Peyrard) إليكترونيّاً بسهولة، أو أيّاً من صيغ "الأصول الواردة في لائحة المراجع.

[٢٩] هذه الأصناف هي الرابع، والخامس والسادس (بحسب ترتيب الخوارزمي وبعد القسمة على معامل x^2):

$$\text{(IV)}: x^2+bx=c\ ;\ \text{(V)}: x^2+c=bx\ ;\ \text{(VI)}: x^2=bx+c\ ;$$

حيث يكون b وc عددين مُنطقين موجبين. تعدّد أصناف معادلة الدرجة الثانية سببه عدم معرفة الخوارزمي ورياضيّي عصره بالأعداد السالبة.

(المبني) على الخطّ المحصور بين نُقطتي القَطع، مساوياً للمربّع (المبني) على نصف الخط" [Peyrard, Vol. 1, p. 93]، و[Vitrac, 1990, p. 233].



يستخدم أقليدس الصورة المقدّمة أعلاه، حيث AB هو الخطّ المقسوم إلى قسمين غير متساويين على النقطة D وإلى قسمين متساويين على النقطة C، منتصفِهِ. ويأخذ $DB = DH$ و $LH = HG = CD$. ثمّ يبرهن بطريقة هندسيّة هذه القضيّة، أي أنّ مساحة المستطيلِ $ADHK$، الذي ضلعاه هما الخطّان AD وDB مجموعة مع مساحة المربّع المبني على CD (المساوي للمربّع $LHGE$)، تساوي، مساحة المربّع المبني على نصف AB، وهو المربّع $BCEF$.

وقد رأى بعض المؤرخين في هذه القضية حلاً هندسياً للمعادلة من الدرجة الثانية

$$x^2 + b^2 = ax$$

(وهي من الصنف الخامس، بحسب تصنيف الخوارزمي). فهذه المعادلة مكافئة لـ

$$x.(a-x) = b^2 \qquad \text{(E)}$$

فإذا أعتبرنا $AB = a$ و $BD = x$ يكون $AD = a-x$ وتكون مساحة المستطيل $ADHK$ مساوية لـ $x.(a-x) = ax - x^2$، ومساحة المربّع $LHGE$ مساوية لـ $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$. فيكون، بحسب القضيّة II.5، إذا فُسِّرت جبريّاً:

$$x.(a-x) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

فيكون

$$x.(a-x)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$$

فتكون المعادلة (E) مكافئة لكلّ من العلاقتين:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=b^2 \quad \text{و} \quad \left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2$$

(ومن هنا يأتي الشرط $\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2=\frac{a^2}{4}-b^2\geq 0$)، ويكون

$\left(\frac{a}{2}-x\right)=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$، أو $\left(x-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$،

أي $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$.

القضيّة II.6: "**إذا قُطِع خطّ مستقيم، إلى قطعتين متساويتين وأضيف إليه، على استقامة، خطّ مستقيم، يكون المستطيل المُحتوى تحت المستقيم الكامل مع المستقيم المُضاف، وتحت الخط المضاف، مع مربّع المرسوم على نصف المستقيم الكامل، مساوياً للمربّع المرسوم على نصف المستقيم الكامل مع المستقيم المضاف، باعتبارهما خطّاً واحداً**" [Peyrard, Vol. 1, p. 93].

إذا قرأنا هذه القضيّة جبريّاً وسمّينا b الخط، وx الخط المضاف، تُكتب هذه القضيّة على الشكل التالي: $x.(b+x)+\frac{b^2}{4}=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2$؛ عند ذلك من السهل أن نرى أنّها تُعطي حلّ معادلة الدرجة الثانية من الصنف الرابع:

$$\text{(IV)}: \ x.(b+x)=c$$

وكذلك، إذا سمّينا b الخط، وx الخط مع الخط المضاف (أي $x-b$ الخط المضاف)، تُكتب هذه القضيّة على الشكل التالي: $x.(x-b)+\frac{b^2}{4}=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2$؛

عند ذلك من السهل أن نرى أنّها تُعطي حلّ معادلة الدرجة الثانية من الصنف السادس:

$$(\mathrm{VI}):\ x.(x-b)=c$$

ولا شكّ أنّ تفسيرات من هذا النوع (جبريّة) هو صحيحٌ في رياضيّات عصرنا، إنّما لا شكّ أيضاً بأنّه غريب عن رياضيّات أقليدس، وعن مشروعه، الذي هو هندسيّ في الأساس. وقولنا هذا لا يتعارض أبداً مع كون الهندسة الأقليديّة قد بقيت منذ عصر الخوارزمي، ولمدّة طويلة[30] الأداة الفعّالة في تبرير خوارزميّات الحلول والقضايا الجبريّة.

***

المراجع

***في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربيّة وبلغة أخرى، جرت ترجمتها إلى العربيّة ومتوفّرة باللغتين.**

Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Bellosta, H. 2010. "La réception de la science arabe en Europe", dans *Encyclopédie des relations sociales entre le monde islamique et l'Occident*, supervisée par Samir Sleimane, (Téhéran 2010). Publié aussi sur le site de l'Equipe d'Etude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe: www. histosc.com.

بلّوستا، هيلين، ٢٠١٠. "استقبال العلم العربي في أوروبا": نُشِر في "موسوعة تاريخ العلاقات بين العالم الإسلامي والغرب"، تأليف نخبة من الأكاديميين؛ إشراف د.سمير سليمان، (٩١٨ صفحة من القطع الكبير)؛ إصدار المجمع العالمي للتقريب بين المذاهب الإسلامية، بيروت/ طهران. والمقال منشور أيضاً في الموقع الإليكتروني للجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة: .www. histosc.com

---

[30] راجع الفقرة ٢، من الفصل الثالث من [فارس، ٢٠١٧].

Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Seuil, Paris.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement axiomatique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2016. *Commentaire du Livre X des Éléments d'Euclide, par Abū Ja'far al-Khāzin*. Éditions de l'Université Libanaise, Beyrouth.

فارس. ن. ٢٠١٦. رسالة أبي جعفر الخازن في تفسير الكتاب العاشر من أصول أقليدس. منشورات الجامعة اللبنانيّة–بيروت.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس، ن. ٢٠١٧. "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت.

Heath, T. 1956. (Sir Thomas L. Heath). *The thirteen books of EUCLID'S ELEMENTS*, 2nd edition, 3 vol. Dover New York.

Itard, J. 1984. *Essais d'histoire des Mathématiques, introduites et réunis par R. Rashed.* Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

Kouteynikoff, O., Loget, F., Moyon, M. 2013. Corpus des Editions Renaissantes des Eléments d'Euclide (1482-1606), Responsables du corpus : Caractéristiques principales de l'édition : *www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?article1066*

Peyrard, F. 1814, 1816, 1818. *Les œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français*, 3 tomes : (vol. 1 : Livres I-VII, vol. 2 : Livres VIII-X, vol. 3 : Livres XI-XIII), Paris. On peut le retrouver sur internet (http ://books.google.com/). On peut consulter aussi le site de « l'Equipe d'Etudes et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe » : www.histosc.com.

Rashed, R. 1984 (1). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.

راشد، ر. ١٩٨٩. "تاريخ الرياضيات العربية – بين الجبر والحساب" مركز دراسات الوحدة العربيّة –بيروت. نقله إلى العربيّة د. حسين زين الدين عن صيغته الفرنسيّة.

Rashed, R. 1984 (2). *Diophante : Les Arithmétiques, Tome III : Livre IV.* "Collection des Universités de France", Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 1984 (3). *Diophante : Les Arithmétiques,Tome IV : Livres V, VI, VII.* "Collection des Universités de France", Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

راشد، ر. ٢٠١٠. "رياضيّات الخوارزمي– تأسيس علم الجبر"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، صدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ترجمة عن الأصل الفرنسي المذكور ([Rashed, 2007]).

Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Taton, R. (sous la direction de), 1957. *Histoire générale des sciences*, vol. 1, "*La science antique et médiévale*", sous la direction de P.U.F, Paris..

Vitrac, B. 1990-2001. *Euclide d'Alexandrie. Les Éléments*, vol. 1 : 1990, vol. 2 : 1994, vol. 3 : 1998, vol. 4 : 2001. PUF, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècle)*, Vrin, Paris.