ديوفنطس والجبر

بقلم نقولا فارس: nfares55@hotmail.com (٢٢-١-٢٠١٨)

"فريق الدراسة والبحث في التقليد العلمي العربي"

(الجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة)

هذه الدراسة مقتطعة من الفصل الثاني من كتاب: "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت، ٢٠١٧، لكاتب هذا المقال ([فارس، ٢٠١٧])[١].

١. مقدّمة.

ما زال الجبر، منذ بداية تأسيسه مع الخوارزمي، وإلى يومنا، هو علم الحسابات على كثيرات الحدود وحلّ المعادلات "الجبريّة" (أو أنظمتها). والمعادلات الجبريّة هي تلك التي يكون طرفاها تعبيرين كثيري حدود. ومنذ القرن السادس عشر، ومع ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) بشكل خاصّ، واستخدام الأعداد السالبة على نطاق واسع، أخذت المعادلة الجبريّة شكلَ تعبير كثير حدود يعادل صفراً[٢].

وقد وُلِد الجبر مع كلمة "شيء" أي مع إدخال الخوارزمي لهذه الكلمة (النَكِرة) في القاموس الرياضي، وقيامه بإجراء عمليّات علم الحساب، أي الجمع (والطرح) والضرب، على "الأشياء" وعلى كثيرات الحدود[٣]. إنّ نقل أو مدّ تلك العمليّات من مجال الأعداد إلى مجال أوسع (مجال "الأشياء") هو مكمن عبقريّة الخوارزمي وهو ما ولّد علم الجبر.

---

[١] أنظر لائحة المراجع في نهاية المقال.

[٢] أي أنّها (في حال معادلة بمجهول واحد، x)، أخذت الشكل: $\sum_{i=0}^{i=n} a_i .x^i = 0$، حيث تنتمي المعامِلات a_i إلى أحد الحقول العدديّة.

[٣] أدخَل الخوارزمي (محمّد بن موسى) كلمة شيء إلى القاموس الرياضي للمرّة الأولى في التاريخ في كتابه "كتاب الجبر والمقابلة" الذي ألّفه في بغداد أيّام حكم الخليفة العبّاسي، المأمون" (٨١٣-٨٣٣م). كلمة "شيء"، النكِرة، نكتبها الآن (غالباً) ومنذ القرن السادس عشر x. استمرّ هذا الحرف اللاتيني، منذ ذلك الحين وحتّى القرن العشرين، يمثّل (غالباً) المجهول في المعادلة والكائن اللامحدّد في كثيرة الحدود، ثمّ صار يشار إلى اللامحدّد في كثيرة الحدود بـ X، الصورة المكبّرة لذلك الحرف، لتمييزه عن المجهول.

نحاول في ما يلي من هذا المقال أن نبيّن أنّ وصف كتاب "علم الحساب" لديوفنطس بأنّه عمل جبري هو تجاوز يُلصِق بالفكر الرياضي لديوفنطس أموراً لا تنتمي إليه. وكنّا قمنا في مكان آخر ([فارس، ٢٠١٧، ص. ٥٠–٥٨]) بدراسة مماثلة حول طبيعة بعض قضايا كتاب "الأصول" التي وصفت بدون حقّ بأنّها جبريّة. وكان ر. راشد كان قد نفى، في دراسة حديثة، احتمال كون الرياضيّات الهنديّة تحتوي عملاً جبريّاً أو حتى كونها من مراجع جبر الخوارزمي [راشد، ٢٠١٠، ص. ١٢٨–١٤٨].

٢. "بداية الجبر" – مصادر كتاب الخوارزمي: مسألة شائكة ورؤى غير واضِحة.

بقيت نقاشات مؤرّخي الرياضيّات تعكُس، على الأقلّ حتّى نهاية القرن العشرين، نوعاً من الحيرة، بل من الخلاف بين آرائهم، حول مسألة مصادر جبر الخوارزمي ومسألة "بداية الجبر"، وهما مسألتان مترابطتان.

عبّر عادل أنبوبا عن تلك الحيرة عندما كتب في ثمانينيّات القرن العشرين: "من موقعنا اليوم، كمشاهدين عن بعد لتاريخ الجبر عند العرب، نجِد أنّ هذا التاريخ يبدأ بحدث مفاجئ، غير متوقّع..." (قاصداً كتاب الخوارزمي الجبري) [Anbouba, 1978, p. 66]. وكتب ر. راشد عند نهاية ذلك القرن ما يوضح ذلك القول: "ويبقى السؤال التالي دون جواب: لماذا يبدو علم الجبر بالغ النضج بطرائقه رغم أنّه مولود جديد؟ وما هو السبب في أنّ هذا الإسهام –الذي توحي مظاهر عديدة منه بأنّه تتويج لنشاط سابق– يظهر، مع ذلك، كبداية أصيلة" [راشد، ١٩٨٩، ص. ٢١].

ونعتقد أنّ أ. ب. يوشكيفيتش كان يُعَبِّر عن رأي كلّ مؤرّخي الرياضيّات عندما اعتبر في الستينيّات من القرن الماضي أنّ "مسألة مصادر الخوارزمي لم تزل مسألة مفتوحة بالكامل". وفي محاولة لتلمّس مصادرٍ لجبر الخوارزمي في الرياضيّات الهنديّة، يتابع: "ولكنّ جبره (أي جبر الخوارزمي) يحتوي سلسلة من المميّزات. فلا نجد في الجبر الهنديّ أيّ شرح هندسيّ لقواعد حلّ معادلات الدرجة الثانية، ولا للعمليّات التي تستخدم المقادير الجبريّة، بينما تحتلّ هذه القواعد والعمليّات (وشرحها الهندسي) مكاناً بارزاً عند الخوارزمي". وبعد مقارنة أسلوب الخوارزمي

بأسلوب "أصول" أقليدس (وبخاصّة في كتابه الثاني)، يستنتج يوشكيفيتش بحقّ أنّ "أسلوبَي التفسير والبرهان مختلفان بشكل أساسيّ عند هذين المؤلّفين. فإذا كان هناك من تأثير للجبر الهندسي عند القدماء، على الخوارزمي، فإنّ هذا التأثير لم يكن من الممكن أن يحصل إلاّ بشكل متحوّلٍ بعمق ويتلاءم مع متطلّبات الجبر العددي". ويضيف، من أجل التذكير بأنّ مسألة مصادر جبر الخوارزمي لم تُحسم بعد: "ولكنّ ما نقوله، ليس سوى فرضيّة لا تستند حتّى الآن على أيّ تبرير تاريخي". ومن جهة أخرى لا يعتقد يوشكيفيتش بأيّ تأثير محتمل لديوفنطس على جبر الخوارزمي معتبراً أنّ "على حدّ علمنا، أوّل الترجمات العربيّة لديوفنطس تمّت في بغداد على يد العالم المسيحي قسطا بن لوقا البعلبكي، نسبة إلى مدينة بعلبك في لبنان، والذي توفي عام ٩١٢ في أرمينيا، ومن بعد، على يد أبي الوفاء" [Youschkévitch, 1976, pp. 42 - 43].

ويلخّص عادل أنبوبا بوضوح الأفكار التي بقيت حتّى نهاية القرن العشرين قيد التداول حول تأثير التقليدَين الرياضيَّيْن اليوناني والهندي في جبر الخوارزمي: "منذ بداية القرن التاسع عشر، تضعُ المناقشاتُ الذين يعتقدون بوجود نَسَب يونانيّ في مواجهة أولئك الذين يرون أصلاً هنديّاً، ولا تتوصّل إلى نتيجة مُقنِعة" [Anbouba, 1978, p. 73]. فلئن كان أسلوب الخوارزمي يُذكّر بالأعمال الهنديّة، في ما يتعلّق بالطرائق الحسابيّة للحلول، فإنّ تبريره لهذه الطرائق، بواسطة الهندسة، ينتمي إلى أسلوب الكتاب الثاني من "أصول" أقليدس.

ولكنّ الرياضيّات اليونانيّة أو الهنديّة، ليست المصادر الوحيدة المحتملة لجبر الخوارزمي. فهذا الرياضي عاش في جزء من العالم لا بدّ أن يكون لإرث بلاد بابل وتقاليدها العلميّة حظ وافر في الاستمرار فيه، بشكل أو بآخر. لذا يجب ألّا يُستبعد تأثير إرث المنطقة وتقاليدها. و بهذا الخصوص يقول ع. أنبوبا نفسه: "لم تبدأ أصول الجبر العربي (وأيضاً أصول الهندسة اليونانيّة) بتلقّي الإيضاحات الأكثر إقناعاً، إلاّ حوالي العام ١٩٣٠، مع الفك الواسع لرموز اللوحات البابليّة". ويذهب إلى أبعد من ذلك، فيشير إلى احتمال تأثير بابلي على "حساب" ديوفنطس وعلى الكتاب الثاني من "الأصول"، وكذلك على ظهور جبر الخوارزمي ويقول: "إنّ قضايا الجبر الهندسي التي يتضمّنها كتاب "الأصول" لأقليدس، والتي تبتعد بطبيعتها وبهدفها عن المِثال الرياضي اليوناني وعن أهداف الكتاب، تأخذ على ضوء ذلك معناها الحقيقي كمنجزات غريبة

(عن التقليد اليوناني). وستتوضّح كذلك الصورة المستَغرَبة لرياضيّات أَيْرُن الإسكندري ولرياضيّات ديوفنطس. وتبعاً لذلك يكون جبر الخوارزمي نوعاً من الانبعاث لهذا التيّار البابلي الذي لم تزل الظلمة الكثيفة تلفّ مسألة تطوّره وانتقاله عبر العصور" [Anbouba, 1978, pp. 73- 74].

نظنّ أنّ السبب الرئيسي لعدم اليقين هذا حول مسألة مصادر جبر الخوارزمي، هو النقص في المعطيات التاريخيّة. فالخوارزمي نفسه، لا يُشير إلى أيّ من مصادر كتابه الجبري، بينما نراه يُعبّر في عمله الحسابي بصراحة أنّه يرتكز في ذلك الكتاب إلى نماذج هنديّة[٤]. هذا النقص ترك المجال واسعاً أمام عدد من الافتراضات والتخمينات التي تَرَسَّخَت فَشابَهت المسلّمات بسبب المكانة العلميّة لمطلقيها، وترديد تلامذتهم وخلفائهم لها دون نقاش. وكان من الطبيعي أن تتناقض هذه التخمينات فيما بينها، بسبب غياب إسنادها بشكل دقيق، وأن يحصل نوع من الخلط بين "مصادر" كتاب الخوارزمي وبين "أصول الجبر". كان من المسلّمات، مثلاً، اعتبار كتاب "المسائل العدديّة" لديوفنطس عملاً جبريّاً[٥] أو، على الأقلّ، اعتبارُه أحد أصول الجبر، أو اعتبار الكتاب الثاني من "أصول" أقليدس بداية للجبر الهندسي[٦]. وقيل الكثير عن الأعمال الجبريّة في الرياضيّات البابليّة[٧]؛ ومنذ بداية القرن العشرين انتشرت أفكار ترى في بعض الأعمال الهنديّة من القرنين السادس والسابع للميلاد مصادر لكتاب الخوارزمي.

---

[٤] لم يصل عمل الخوارزمي الحسابي إلى عصرنا بالعربيّة. نقرأ في مستهلّ إحدى صِيَغه اللاتينيّة ما معناه: "... قرّرنا أن نعرُض طريقة العدّ عند الهنود بواسطة الرموز التسعة..." [Youschkévitch, 1976, p. 16]. وتشير كتابات أخرى للخوارزمي، بشكل أو بآخر، إلى الهند.

[٥] يذكر ر. راشد في كتابه [راشد، ٢٠١٠، ص. ١٢٣]، عدداً من الكتب الحديثة المهمّة التي تتبنّى هذا الموقف. ونقرأ له في كتاب آخر، [راشد، ١٩٨٩، ص. ٦٣-٦٤]، أنّ بول تانّري (Paul Tannery) يعتبر أنّ الجبر العربي "لم يتجاوز المستوى الذي بلغه ديوفنطس"؛ راجع أيضاً مقال هـ. بلّوستا [Bellosta, 2010]، التي تعود إلى الصفحة ٦ من كتاب بول تانّري: *La géométrie grecque*. أنظر أيضاً [Taton, 1957, pp. 116].

[٦] راجع ما ورد حول اعتبار هذا الكتاب كتاباً في الجبر الهندسي بدءاً من بول تانّري (Paul Tannery)، في [Dahan-Delmico et Peiffer, 1986, p. 76].

[٧] وذهب بعض كبار مؤرّخي العلوم إلى اعتبار أنّ البابليّين "هم مخترعو الجبر"؛ أنظر، على سبيل المثال، الفصل الثاني من الكتاب: [Taton, 1957, p. 116]. وتُسهِم عناوين بعض المقالات أو الكتب بإلقاء الضباب حول بداية هذا العلم. ومن هذه العناوين "٤٠٠٠ عام من الجبر" :

وفي عام ٢٠٠٧، صدر للباحث رشدي راشد بالفرنسيّة كتاب حول جبر الخوارزمي قمنا بترجمته إلى العربيّة عام ٢٠١٠، يهدف (كما يبدو من خلال عنوانه ومحتواه)[٨] إلى حسم مسألة بداية علم الجبر. يدرس المؤلِّف مسألة مصادر ذلك الجبر في فقرة طويلة بعنوان "قراءات الخوارزمي الرياضيّة" [راشد، ٢٠١٠، ص. ٨١-١٤٨]. أثبتت تلك الدراسة اطّلاع الخوارزمي الأكيد على "أصول أقليدس" ومن ضمنها الكتاب الثاني من هذا المؤلّف، كما أثبتت اطّلاعه على أعمال هيرون الإسكندري الهندسيّة واستخدامه لبعض مسائلها. ولكنّها من جهة أخرى، دحضت أو استبعدت نظريّات سابقة حول كون كتاب ديوفنطس المعروف بالـ"حساب" أو بالـ"مسائل العدديّة"، أحد مصادر الخوارزمي أو، حول اعتباره عملاً جبريّاً سابقاً لكتابه الجبري. واستبعدت كذلك اعتبار أعمال الرياضيّين الهنود (وبشكل خاصّ، برَهمَغوبتا وأريبهَطا) من بين مصادر جبر الخوارزمي. ارتكز رشدي راشد في استنتاجاته هذه إلى دراسة كلّ من هذه الأعمال، وكان قد أشار إلى هذه الاستنتاجات بأشكال مختلفة في مقالات سابقة ([Rashed, 1984 (2), 1984 (3), 1994, ...]) وفي مداخلات غير منشورة. ولا شكّ بأنّه قصد من وراء عرضه في الفقرة المذكورة من كتابه أن يُثبِت ما أكّده في بداية كتابه وهوأنّ كتاب الخوارزمي هو "عمل تأسيسي للجبر". ومؤخّراً صدر لنا كتاب ([فارس، ٢٠١٧]) تؤكّد الفصول الثلاثة الأولى منه ولادة الجبر ،كمادّة علميّة مستقلّة عن الهندسة وعن علم الحساب، في كتاب الخوارزمي الجبري وتنفي وجود الجبر كمادّة علميّة قبل ذلك الكتاب. وكنّا قد بيّنّا في مقال سابق ([فارس، ٢٠١٥]) أنّ كتاب الخوارزمي يحوي الشكل المصادراتي الأوّل لعلم الجبر.

٣. ديوفنطس والجبر.

لئن كان إعطاء الصفة الجبريّة لعدد من قضايا بعض كتب "أصول أقليدس" أمراً لا يصمد طويلاً أمام التحليل الرياضي والتاريخي الدقيق[٩]، إلاّ أنّ الأمر يختلف بالنسبة إلى كتاب

4000 Jahre Algebra, Geschichte, Kulturen, Menschen. H. W .Alen; A. Djafari Naini; M. Folkerts; H. Schlosser; K. H. Schlote; H.Wussing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

[٨] عنوانه بالفرنسيّة: "*Al-Khwarizmi-Le commencement de l'algèbre*" (أنظر المراجع [Rashed, 2007]) ونقلناه إلى العربيّة تحت عنوان: "الخوارزمي وتأسيس علم الجبر [راشد، ٢٠١٠].

[٩] راجع [فارس، ٢٠١٧، الفصل الثاني].

ديوفنطس الذي يحمل عنوان "علم الحساب" والمعروف أيضاً بـ"المسائل العدديّة". فما زالت، إلى يومنا، نسبةٌ مرتفعة من المقالات المخصّصة للتدريس والثقافة العامّة والمتعلّقة بديوفنطس، تصف هذا العالِم الاسكندري بأنّه "أبو الجبر". وتلك المقالات لا تستند إلى فراغ، بل إلى آراءٍ سبق أن أعلن عنها عدد من الرياضيّين منذ القرن السادس عشر وردّدها عدد من مؤرّخي الرياضيّات حتّى يومنا هذا.

٣-١. إختلاف الآراء حول رياضيّات كتاب ديوفنطس.

اختلفت تعليقات الرياضيّين ومؤرّخي الرياضيّات على هذا الكتاب، وتقييماتهم لموضوعه. وهي تقييمات اتسمت غالباً بعدم الدقّة وصيغت بأسلوب مسهب يتحاشى الحسم. فهو ليس كتاباً في علم الحساب بالمفهوم الإقليدي الذي هو مفهومنا العصري لعلم الحساب (الذي يتناول خصائص العدد والذي يوجد في الكتب ٧ و٨ و٩ من "الأصول"). كما أنّه ليس كتاباً في علم الحساب العملي الذي يتناول العمليّات الحسابيّة على الأعداد. وهو أيضاً ليس كتاباً جبريّاً كما سنرى فيما سيتبع. والحقّ يقال، إنّ من الممكن قراءة محتوى الكتاب بأشكال مختلفة، ممّا سمح للرياضيّين ومؤرّخي الرياضيّات بقراءته، كلّ من وجهة نظره، أو من موقعه الخاص فنظر إليه بعضهم ككتاب حسابي ورآه بعض آخر ذا طابع جبريّ وذهبت بعض التعليقات الحديثة لإمكان اعتباره ذا صفة هندسيّة-جبريّة [Rashed et Houzel, 2013, p. 20].

وما من مجال هنا للخوض في الأسباب الأخرى التي دعت إلى تلك الاختلافات، والتي لا تتعلّق كلّها بمحتوى كتاب ديوفنطس. من هذه الأسباب، أنّه لم تتوفّر أمام العدد الهائل من كبار الرياضيّين أو مؤرِّخي الرياضيّات الذين درسوه، المعلومات الكافية حول النشاط الرياضي في المرحلة العربيّة. وهذا النقص استمرّ حتّى ما بعد منتصف القرن العشرين.

إلاّ أنّنا، ونحن بصدد تقييم إنجاز الخوارزمي الجبري وتطوّر الجبر من بعده، لا بدّ من أن نُلقي نظرة على بعض جوانب عمل ديوفنطس، فذلك يسمح لنا أيضاً بتكوين فكرة، واضحة إلى حدّ ما، عن موقع ذلك الكتاب من بداية الجبر كعلم. ولعلّ من الأفضل أن نبدأ بالخلاصة التي انتهينا إليها، بعد قراءات في كتاب ديوفنطس وحوله، وهي التالية:

"كتاب ديوفنطس ليس بداية لعلم الجبر، ولا موضوعه هو علم الجبر ولا هو من المراجع التي استند إليها الخوارزمي في تأسيس ذلك العلم. ولكنّه بالمقابل، يحتوي عدداً كبيراً من الأدوات والقواعد والوسائل التي يمكن وصفها بأنّها جبريّة لأنّها استُخدِمت منذ القرن التاسع (بدءاً من الخوارزمي) في بناء الجبر وفي تطويره".

إنّ وجود تلك الوسائل، هو برأينا ما دعا إلى اعتبار كتاب "الحساب" عملاً جبريّاً. وهو ما جعل من غير المستغرَب أبداً كون هذا الكتاب قد تُرجِم إلى العربيّة (في نهاية القرن التاسع[١٠]، أي بعد تأليف كتاب الخوارزمي بحوالي نصف قرن) تحت عنوان "صناعة الجبر". وهو أيضاً ما جعل من غير المستَغرَب أنّ مسائله تُرجِمَت بلغة الجبر التي أدخلها الخوارزمي، ممّا جعل هذا الرياضي (الذي يرجّح أن يكون من القرن الثالث للميلاد) يبدو خَلفاً للخوارزمي، رغم كونه سلفاً له بمقياس الزمن على حدّ تعبير ر. راشد[١١].على كلّ حال يُجمِع المؤرّخون على أنّ كتاب ديوفنطس لم يكن مصدراً من مصادر الخوارزمي[١٢]، ويُجمِعون حتّى على أنّ لا شيء يدلّ على أنّه كان من مصادر أبي كامل، رغم أنّ هذا الأخير وضع في كتابه العديد من المسائل غير المحدّدة التي تُذَكِّر بأسلوب ديوفنطس [Anbouba, 1979, p. 135, Rashed, 2003 et Sésiano, 1982, p. 9]. فلا توجد إذن أدلّة على دورٍ ملموسٍ لذلك الكتاب في الجبر العربي، قبل ترجمته إلى العربيّة؛ أمّا بعد ترجمته فقد كان تأثيره واضحاً في بعض أعمال أبي الوفاء البوزجاني (...– حوالى ٩٩٧) وخاصّة في جبر الكرجي (القرن ١١م) الذي استعار منه عدداً كبيراً من المسائل غير المحدّدة وعالجها بأسلوب جبري في كتابه "الفخري". ومن الطبيعي أنّنا لن نتمكّن هنا من إرضاء فضول القارئ، الذي ننصحه، لمزيد من الدقّة والتوثيق حول كتاب ديوفنطس، بمراجعة كتاب ر. راشد وكريستيان هوزيل [Rashed et Houzel. 2013][١٣] وكتاب بول فير إيك [Ver Eecke, 1926]، وكتابي ر. راشد [Rashed, R. 1984] و[راشد، ١٩٧٥]، وكتاب جاك سيزيانو [Sésiano, 1982]، وهي الكتب التي ساعدتنا كثيراً في كتابة هذه الفقرة.

---

[١٠] على يد الرياضي قسطا بن لوقا (نهاية القرن التاسع).

[١١] أنظر [راشد، ٢٠١٠، ص. ١٢٤ =2007, p. 61، أو Rashed et Houzel. 2013, p. 20].

[١٢] راجع الفقرة ٤، من الفصل الأوّل من [فارس، ٢٠١٧].

[١٣] وخاصّة المقدّمة، ، ص. ١–٤٦.

وفي عودة إلى عبارة "أبوّة الجبر"، نلاحظ أنّها عبارة تفتقر إلى الدقّة. فهي قد تعني أنّ كتاب "المسائل العدديّة"، كان أوّل كتاب في الجبر، أو أنّه أسّس للجبر، أو أنّه كان مصدراً ارتكز عليه الخوارزمي لتأسيس الجبر، أو أنّه من أصول الجبر بمعنى احتوائه لممارسات جبريّة سابقة للكتب الجبريّة بالمعنى الدقيق (أي لتلك التي موضوعها الجبر: حساب كثيرات الحدود وعلم المعادلات كثيرة الحدود). لذا يسبّب استخدام عبارة "أبوّة الجبر"، من دون توضيحها، مزيداً من الضبابيّة حول مسألة بداية الجبر؛ فهو يخلط بين "بداية" هذا العلم وبين "أصوله"، تلك الأصول التي يمكن، بمعنىً ما، إرجاعها إلى العلم البابلي أو إلى المصري القديم، لكونهما عرفا تعاملاً مع معادلات ومجاهيل واستخدمت فيهما وسائل جبريّة. ونظنّ أنّ ذلك ما دعى ر. راشد وك. هوزيل إلى كتابة ما يلي: "بعد تحليل لغوي وفلسفي متقن، يخلص كلاين (Klein) إلى القول بأنّ عمل ديوفانطس هو بمثابة "مرحلة بدائيّة من الجبر". ولكنّ هذا الاستنتاج الذي يعتبر مهمّاً عندما يصدر عن كلاين (حتّى وإن أظهرَ نَصُّه تقديماً غير دقيق لتاريخ الرياضيّات)، هو استنتاج مُضِرٌّ عندما تتداوله أيد غير خبيرة" [Rashed et Houzel. 2013, p. 21].

٣–٢. نظرة إلى موضوع كتاب ديوفنطس والهدف من تأليفه.

لا تُعرَف بالتحديد الفترة التي نشط فيها هذا الرياضي الاسكندري وكتب فيها، باليونانيّة، مؤلَّفه الشهير الذي يحمل عنوان "علم الحساب" (أو، باختصار، "الحساب"). ولكنّ من المرجّح أن تقع تلك الفترة ما بين القرنين الثالث والرابع للميلاد. يقع هذا المؤلَّف، كما يقول ديوفنطس نفسه، في ثلاثة عشَر كتاباً (أو فصلاً أو "مقالة" بحسب المصطلحات العربيّة القديمة). وحتّى أمس قريب كان يُعتَقَد أنّ ما حُفِظَ من هذا المؤلّف هو ستّة كتب فقط، صيغت بلغتها الأصليّة، اكتشفها الفلكي المشهور ريجيومنتوس (Régiomontus, 1436-1476). لم تتعرّف أوروبا على محتوى مؤلّف ديوفنطس قبل أن ينقل الرياضي بومبللي (Raphaël Bombelli, 1526-1572) الكتب الخمسة الأولى منه إلى اللاتينيّة، عام ١٥٧٢، أي بعد أكثر من ١٢٠٠ سنة على تأليفه[١٤]. وبدءاً من القرن السابع عشر قام عدد من كبار الرياضيّين بترجمات أكثر دقّة،

[١٤] يشير بول فير إيك إلى أنّ بومبللي وضع، في كتابه الجبري الضخم، ١٤٣ مسألة من الكتب الخمسة الأولى المذكورة في ترجمة غير أمينة تماماً للغة ديوفنطس الرياضيّة. ويقول إنّ أوّل تسرّب لبعض المسائل من هذا المؤلَّف قد حصل من ضمن أعمال ليونارد دو بيز

للكتب الستة إلى لغات أوروبيّة، وبتحقيقات كليّة أو جزئيّة لها[١٥]. وقد قام بترجمة تلك الكتب الستّة إلى الفرنسيّة وبالتعليق عليها بول فير إيك (Paul Ver Eeke, 1867-1959] ونشرها عام ١٩٢٦.

ولكن، في العام ١٩٧١ اكتشف ر. راشد أربعة كتب أخرى من هذا المؤلّف، في مدينة مَشهد بإيران[١٦]. وتلك الكتب هي قسم من ترجمة له[١٧] إلى العربيّة، قام بها الرياضي قسطا بن لوقا (نهاية القرن التاسع). وقد قام بدراسة هذه الكتب الأربعة وتحقيقها ونقلها إلى الفرنسيّة الباحث ر. راشد عام ١٩٧٥ وعام ١٩٨٤، ومن ثمّ جاك سيزيانو (J. Sésiano) عام ١٩٨٢[١٨]. وقد غيّر ذلك الاكتشاف ترتيب كتب ديوفنطس الذي كان معتمداً منذ القرن الخامس عشر. فبقيت الكتب اليونانيّة ١ و٢ و٣ على ترتيبها السابق وأتت بعدها الكتب المكتشفة باللغة العربيّة لتحتلّ المراتب ٤ و٥ و٦ و٧، وتأتي بعد ذلك الكتب اليونانيّة التي كان ترتيبها ٤، ٥، ٦. تحوي الكتب العشرة المذكورة ٢٩٠ مسألة (١٨٩ في كتب الصيغة اليونانيّة، والباقية في كتب الصيغة العربيّة: ٤، ...، ٧). وقد أثّر اكتشاف الكتب الأربعة المذكورة (بالصيغة العربيّة) على تقييم الرياضيّين ومؤرّخي الرياضيّات لكتاب ديوفنطس ولتأثيره في الرياضيات اللاحقة.

في السطور الأولى من كتابه، يعلن ديوفنطس عن مشروعه، متوجّهاً إلى شخص اسمه ديونيسيوس:

"لقد التزمت أن أعرض **طبيعة الأعداد وقوّتها**، بدءاً من الأساس الذي بُنِيَت عليه الأمور". ثمّ يتابع بعد أسطر: "تعلم، من بين ما تعلمه من أمور أخرى، أنّ الأعداد مُشكّلة من وحدات، لذا

(فيبوناتشي، عامي ١٢٠٢ و١٢٢٨) الذي أدخل الجبر إلى إيطاليا عبر اطّلاعه على الرياضيّات العربيّة [Ver Eecke, 1926, p. LIX]. إلاّ أنّ ر. راشد يوضح أنّ المسائل الحسابيّة (من الأسلوب الديوفنطسي) الموجودة عند فيبوناتشي مأخوذة من كتاب أبي كامل في الجبر، ولا يوجد ما يشير إلى أنّ فيبوناتشي أخذها من كتاب ديوفنطس، إن مباشرة، أو غير مباشرة، عبر كتاب الكرجي ذي العنوان "الفخري"، الذي يحوي العديد من المسائل المأخوذة من كتاب ديوفنطس [Rashed, 2003].

[١٥] لمزيد من التفصيل راجع [Ver Eecke, 1926, pp. LXII-LXVII].

[١٦] قام بهذا الاكتشاف الباحث ر. راشد (راجع: [Rashed, 1984 (2), p. v]).

[١٧] وبالتحديد لسبعة كتب منه [راشد ٢٠١٠، ص. ١٢٤] و[Rashed, 1984 (2), p. v].

[١٨] أنظر لائحة المراجع.

من الواضح أنّ تشكّلها يمتدّ إلى اللانهاية. ونجد بين الأعداد، بشكل خاصّ، (الأعداد) المربّعة التي تتشكّل بواسطة عدد مضاعَف[19] بنفسه، وهو العدد الذي يسمّى ضلع المربّع؛ وهناك، من جهة أخرى، الكعوب التي تتشكّل بواسطة المربّعات المضاعَفة بضلعها؛ بعد ذلك هناك المربّعات–مربّعات، التي تتشكّل بواسطة المربّعات المضاعَفة بنفسها؛ بعد ذلك أيضاً هناك المربّعات–كعوب، التي تتشكّل بواسطة المربّعات المضاعَفة بالكعوب التي لها الضلوع نفسها؛ وأخيراً الكعوب–كعوب، التي تتشكّل بواسطة الكعوب المضاعَفة بنفسها؛ ولكنّ الواقع هو أنّ تأليف (أو توفيق) العديد من المسائل الحسابيّة (أي العائدة لعلم الحساب) تنتج إمّا من جمع هذه الأعداد إمّا من تفريقها، أو من مضاعفتها، أو من النِسَب التي لها فيما بينها، أو التي لها مع جذورها؛ وهذه المسائل سوف تُحَلّ إذا اتّبَعتَ الطريق التي سيُشار إليها لاحقاً" [Ver Eecke, 1926, p. 1].

موضوع الكتاب هو إذن "العدد"، أساس علم الحساب. ويحدّد دىوفنطس هنا ستّة من أنواع (أو أصناف) العدد[20]، ويقول إنّ مسائل علم الحساب هي عبارة عن توفيق أعداد من هذه الأصناف باستخدام العمليّات الحسابيّة من مضاعفة وجمع وتفريق وقسمة ... وعند مراجعة المسائل المطروحة في الكتاب (والمقدّمة كلّها على شكل قضايا)، نجد فيها المجاهيل أعداداً "مُنطَقَةً"، من تلك الأصناف، والمعامِلات أعداداً مُنطَقَةً. ونحن مقتنعون بما خلص إليه ر. راشد وك. هوزيل وهو أنّه "إنطلاقاً من مفهوم "الأصناف" هذا، يصبح من غير المناسب الحديث عن كثيرات حدود وعن معادلات كثيرة الحدود، في كتاب "علم الحساب" [لديوفنطس] بالمعنى الذي يفهمه الجبريّون منذ الكرجي في القرن العاشر" [Rashed Houzel. 2013, p. 28].

ومسائل الكتاب هي في الغالب مسائل غير محدّدة، إلاّ أنّ ديوفنطس يحوّل معادلاتها في مرحلة ما من مراحل حلّها إلى مسائل محدّدة عن طريق إعطاء قيَم كيفيّة مناسبة، لبعض المجاهيل أو المعامِلات، بحيث يحصل في النتيجة على حلّ مناسب للمسألة [Ver Eecke, 1926, p. XXIII].

[19] استخدمنا للأمانة عبارة "مضاعَف بـ" بدل "مضروب بـ" لنقل العبارة الفرنسيّة "multiplié par" لأنّ المضاعفة والكَثرة تخصّ الأعداد، أمّا الضرب فهو عمليّة تتناول المقادير على أنواعها. أنظر تحديد مضاعفة الأعداد (التحديد VII.16 من "أصول" أقليدس).

[20] قوى العدد التي بحسب هذه الفقرة تصل إلى السادسة، تبيّن أنّها تصل بالفعل (بعد اكتشاف كتب الصيغة العربيّة) إلى التاسعة (باستثناء السابعة)، فقد تعامل ديوفنطس فعليّاً مع ثمانية أصناف من العدد.

والمجهول في كتاب ديوفنطس هو دائماً عدد صحيح أو مُنطَق (كسري) موجب. وفي الإجمال تحوي كلّ من مسائل الكتاب عدّة مجاهيل. ويعمد ديوفنطس، في أيّ مسألة، إلى اختيار واحد من المجاهيل كمجهول أساسي (أو يستعين بمجهول مساعد يعتبره المجهول الأساسي)، ثمّ يعمد أثناء حلّه للمسألة، إلى التعبير عن جميع مجاهيل المسألة بواسطة هذا المجهول حتّى يصل في النتيجة إلى مجهول واحد (وتحديداً، إلى مجهول من صنف واحد)[٢١] يقع في أحد طرفي المعادلة، مستخدماً القواعد العامّة التي أعطاها في بداية كتابه والتي سنأتي على ذكرها.

نقصد أنّ ديوفنطس لم يواجه أبداً حلّ مسألة كثيرة الحدود، تحوي قوىً مختلفة من المجهول الواحد. فهو على سبيل المثال، رغم أنّه قدّم حلاًّ لمسائل تعود بالفعل إلى معادلات من الدرجة الثانية، ثلاثيّة الحدود[٢٢]، إلاّ أنّه لم يحوّلها إلى هذا النوع، ولم يواجه هذا الصنف من المعادلات وتحاشى التعامل معه مباشرة، فحلّ تلك المسائل عن طريق أخذِهِ لمجهول مساعد، t، وتحويل كلّ منها إلى معادلة من النوع $t^2 = m$ [٢٣]. وحتّى معادلات الدرجة الأولى ثنائيّة الحدود، لم يعتبرها صنفاً من المعادلات له الحلّ الخاصّ به، الذي يطبّقه على المسائل التي تعود إليه كصنف من المعادلات؛ تدلّ على ذلك كثرة المسائل التي تعود إلى معادلات من الدرجة الأولى في بداية الكتاب الأوّل.

أمّا طرائق الحلول فلا تتبع معايير معيّنة ثابتة إنّما تنتج عن اجتهاد ذكيّ يختلف من مسألة إلى أخرى؛ نقصد أنّنا لا نجد صنفاً من المعادلات مع خوارزميّة ثابتة لحلّه كصنف معيّن. ونظنّ أنّ ذلك ما قصده بول فير إيك عندما كتب: "باستثناء القواعد التي أشار إليها ديوفنطس في مقدّمة كتابه، لا تعرف حلوله لمسائله أبداً قواعد ثابتة، بمفهومنا العصري" [Ver Eecke, 1926, p. XXIV].

---

[٢١] أي أنّه يصل بالنتيجة إلى معادلة يمكن كتابتها عصريّاً على الشكل: $t^n = m$، حيث t هو المجهول الرئيسي وحيث n عدد صحيح و m عدد (مُنطَق) موجب.

[٢٢] راجع المسائل ٢٧، ٢٨، ٣٠، من الكتاب الأوّل، التي تكتب معادلاتها على التوالي كما يلي: $x+y=a,\ x.y=b$ ؛ $x+y=a,\ x^2+y^2=b$ ؛ $x-y=a,\ x.y=$. أنظر حلّ إحداها في نهاية الفقرة ٣-٤، أدناه.

[٢٣] وذلك انسجاماً مع طريقته العامّة التي ذكرناها قبل سطور والقاضية بالوصول في النهاية إلى معادلة من الشكل $t^n = m$. ولا بدّ أن هذه الطريقة هي التي سمّاها الكرجي طريق أو مذهب ديوفنطس. راجع [فارس، ٢٠١٧، الفصل الثالث، الفقرة ٣].

فلم يكن ديوفنطس يهدف من وراء تأليف هذا الكتاب، إلى صياغة خوارزميّات، تُطبَّق على هذا النوع أو ذاك من المعادلات، بل، وكما يلاحظ ر. راشد وك. هوزيل [Rashed et Houzel. 2013, p. 22]، كان هدفه تربويّاً. ذلك الهدف هو تزويد القارئ بمسائل عدديّة عديدة، يحلّها مستخدماً المبادئ والقواعد الحسابيّة الأساسيّة التي قدّمها في بداية كتابه. ويعتبر أنّ القارئ يستطيع، إذا ما استخدم تلك المسائل كتمارين، أي إذا ما تتبَّع حلولها بانتباه، أن يحلّ غيرها من المسائل التي قد تُطرح عليه، باستخدام المبادئ والقواعد الأساسيّة نفسها. فهو يقول في مقدّمة كتابه، بعد أن يقدّم التحديدات والقواعد الأساسيّة، وقبل أن يبدأ بعرض أيّة مسألة: "طبِّق ذلك ببراعة على المعطيات والقضايا، بقدر الإمكان، إلى أن يبقى تعبير واحد مساوياً لتعبير واحد ...".

ثمّ يتابع:

"الآن وقد جمّعنا مادّة وفيرة بخصوص هذه التعابير، لندخل في طريق القضايا. وبما أنّ هذه القضايا عديدة جدّاً، وعظيمة الاتساع، ممّا يجعل استيعابها بطيئاً لمن يبدأ بها، حاولت تجزئة ما يمكن تجزئته منها، و(حاولت) خاصّة، العمل على أن يكون الانطلاق في البداية من تلك التي تتعلّق بالمبادئ، وأن أتدرّج، كما ينبغي أن أفعل، من (القضايا) الأسهل إلى الأكثر تعقيداً. فتزداد إمكانيّة فهمها من قِبَلِ المبتدئين ويثبت توسيعها في ذاكرتهم. وسيتمّ إعدادها في ثلاثة عشر كتاباً" [Ver Eecke, 1926, p. 8-9]. ثمّ يبدأ بعرض مسائل الكتب الثلاثة الأولى.

بعد ذلك يعود ديوفنطس ويؤكّد على الغاية التربويّة وتمرين القارئ وتدرّبه وتدرّجه من السهل إلى الأصعب، فيقول في بداية الكتاب الرابع (الصيغة العربيّة):

"أمّا إذ أتيت فيما تقدّم من القول في المسائل العدديّة على كثير من المسائل التي انتهينا فيها <بعد الجبر والمقابلة>[٢٤] إلى نوع واحد يعادل نوعاً واحداً ما كان منها من نوعي العدد الخطّي والسطحي وأيضاً ما كان مزدوجاً منها، وجعلت ذلك على مراتب يمكّن المتعلّمين حفظُها وتحصيل معانيها، فإنّي أرى أيضاً لئلاّ يفوتك شيء ممّا يمكن عمله من هذه الصناعة أن أكتب

[٢٤] العبارة الموضوعة بين قوسين هي، بالتأكيد، من عند قسطا بن لوقا الذي ترجم كتاب ديوفنطس بتصرّف على أساس أنّه كتاب في الجبر إلى حدّ إعطائه عنوان "صناعة الجبر".

لك فيما يتلو أيضاً كثيراً من مسائل هذا الفنّ ما يكون منها من نوع العدد المسمّى الجرمي وأيضاً ما كان منه مركّباً مع النوعين الأوّلين، وأسلك فيه ذلك المسلك واجعلك ترقى فيه من درجة إلى درجة ومن فنّ إلى فنّ، ليكون ذلك **دربة وعادة**. فإنّك متى عرفتَ ما رسمتُ امكنك الجواب في كثير من المسائل التي لم أرسمها إذ كنت قد رسمت لك كيف المسلك في وجود أكثر المسائل ووصفت لك من كلّ نوع منها مثالاً" [Rashed, 1982, vol. III, p. 1]، [Sésiano, 1982, p. 1].

ليس موضوع الكتاب إذن حلّ المعادلات كثيرة الحدود. الكتاب هو مجموعة ضخمة ومهمّة من المسائل التي يحوّلها ديوفنطس إلى معادلات بعدّة مجاهيل، كلّ مجهول فيها هو عدد (ينتمي إلى أحد "أصناف العدد")، ويحلّها بطرائق ذكيّة وإبداعيّة، مستخدماً الوسائل التي نسمّيها الآن، (أي بعد إدخال علم الجبر في القرن التاسع، وإدخال كلمة "جبر")، وسائل جبريّة: حذف، تعويض، إرجاع المسألة إلى مسألة حُلّت سابقاً، إلخ ...

إنّ إدخال هذه الوسائل الجبريّة هو الذي جعل عدداً من كبار الرياضيّين، بدءاً من قسطا بن لوقا، يعتبرون هذا الكتاب جبريّاً. لقد كان دور هذا الكتاب عظيماً في تكوين الرياضيّين وفي إلهامهم عِبر التاريخ وإلى يومنا هذا[٢٥]. ولكنّ كلّ ذلك لا يغيّر من طبيعة الكتاب[٢٦]. فهو ليس كتاباً في علم الجبر، ولم يبدأ معه هذا العلم، رغم كونه قد استخدم العديد من الوسائل التي يصفها الرياضيون بدءاً من القرن التاسع للميلاد، بحق، بأنّها جبريّة، ورغم كون المسائل المطروحة والمعالجة فيه ساعدت الرياضيّين كثيراً، بدءاً من ذلك القرن، على تطوير الجبر.

٣-٣. الوسائل الجبريّة في كتاب ديوفنطس.

بعد أن يعرض ديوفنطس، في مقدّمة كتابه، أصناف العدد[٢٧]، يتابع:

---

[٢٥] نذكر، على سبيل المثال، أنّه أوحى لفيرما (Pierre Fermat: 1601-1665) بأن ينطق بـ"مبرهنته" الشهيرة التي استعصت على الحلّ حتّى العام ١٩٩٤). وكان قد نطق بالمبرهنة ذاتها عدد من الرياضيّين من التقليد العربي، قبل فيرما بعدّة قرون. أنظر التعليق على القضيّة II.8، في الفقرة ٣-٤، أدناه.

[٢٦] يبقى ذلك الكتاب، بحسب آخر تحليل لرشدي راشد وكريستيان هوزيل، ضمن علم الحساب. فهذان الباحثان يكتبان: "ما من مجال للشكّ في أنّ كتابه (أي كتاب ديوفنطس) هو كتاب حسابي مجاله هو الأعداد المنطَقة الموجبة" [Rashed Houzel. 2013, p. 29].

[٢٧] مقدّمة الكتاب الأوّل: الأعداد المربّعة، المكعبة، ... أنظر الفقرة ٣-٢، أعلاه.

"ومن المتّفق عليه، أنّ أيّاً من هذه الأعداد، بعد إعطائه رمزاً مختصراً، يشكّل عنصراً من عناصر النظريّة الحسابيّة" [Ver Eecke, 1926, p. 2][28]. ثمّ يقدّم مصطلحات تشير إلى كلّ نوع من أنواع الأعداد هذه، هي إجمالاً حرف أبجديّ (أو عدّة حروف) تختصر الكلمة التي تعبّر عن النوع؛ كما يقدّم رمزاً للوحدة (أو الواحد) هو عبارة عن حرف M، مؤشّرٍ بحرف o (M_o). وهنا يجب الإشارة إلى إجماع الرياضيّين على أنّ هذه الاختصارات لا تمثّل رمزيّة جبريّة ولا بداية للرمزيّة الجبريّة، تلك الرمزيّة التي بدأت بالفعل في القرن السادس عشر[29].

بعد ذلك يُدخِل ديوفنطس كلمة تدلّ على العدد المجهول (الأَريتم[30] *arithme* ,αριθμός)، الذي يحدّده على أنّه "العدد الذي يحتوي في ذاته كميّة غير محدّدة من الوحدات" ويختصره بحرف ς. ثمّ، يحدّد عكس المجهول (الأَريتم) وعكس قواه، حتّى السادسة، قياساً على نموذج عكس الأعداد[31]. وبعد ذلك يعطي قواعد ضرب قوى عدد ما (أو العدد المجهول) وعكوس قواه بعضها بالبعض الآخر، مشيراً أنّ قوى الوحدة أو عكس تلك القوى أو ضربها هي الوحدة، لا تتغيّر[32]. ثُمّ، بَعد أسطر، يحدّد القسمة، باختصار ولكن بشكل يفهمه جيّداً المتعامل مع علم الحساب: "بعدما شرحت لك ضرب التعابير التي عرضتُها أعلاه، تكون قسمتها واضحة"

---

[28] أي العائدة إلى "علم الحساب". كلمة "الحساب" تأخذ باللغة العربيّة معنيان: العمليّة الحسابيّة (***calcul***)، أو "علم الحساب" (***arithmétique***).

[29] يُعطي بول فير إيك لمحة مهمّة حول تاريخ الترميز الجبري في [Ver Eecke, 1926, p. 20].

[30] "العدد" باليونانيّة، ومنه كلمة أَريتميتيك (***arithmétique***)، التي تعني علم العدد أو علم الحساب [Ver Eecke, 1926, p. 2].

[31] قياساً على الثلث والربع، ... كما يقول. هذا يعني أنّه إذا كان n عدداً من الأعداد، فإنّ $\frac{1}{n}$ هو عكسه [Ver Eecke, 1926, p. 3].

[32] يعطي كلّ قواعد الضرب التي يقتضيها توفيق قوى العدد الستّة وعكوسها، بشرط ألاّ تتعدّى القوى المستخدمة أو الحاصلة، القوّة السادسة: $n^i \times n^j = n^{i+j}$، حيث $(i + j \le 6)$؛ $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n^i} = \frac{1}{n^{i+1}}$، حيث $(i \le 5)$؛ $\frac{1}{n^i} \times n^j = \frac{1}{n^{i-j}}$ إذا كان $i \ge j$ أو $\frac{1}{n^i} \times n^j = n^{j-i}$، إذا كان $i \le j$ [Ver Eecke, 1926, p. 4-7].

[Ver Eecke, 1926, pp. 7]. إنّ إدخال هذا العدد المجهول (أو غير المحدّد)، إضافة إلى تحديد قواه وعكسه، وعكوس قواه، وإجراء عمليّتي الضرب والقسمة عليها، هو من أهمّ الوسائل الجبريّة في حساب ديوفنطس.

ثمّ ينتقل ديوفنطس إلى ضرب التعابير العدديّة (المكوّنة بالجمع أو بالطرح) بعضها ببعضها الآخَر، ويعطي ما نسمّيه "قاعدة الإشارات": "ما ينقُص مضاعَفاً بما ينقص يُعطي ما هو زائد (إيجابي). إلاّ أنّ ما ينقُص مضاعَفاً بما هو إيجابي يعطي ما ينقُص ..." [Ver Eecke, 1926, p. 7]. وهنا يجب أن نلحظ أنّه لا يأخذ العدد السلبي بذاته، إنّما يتعامل مع التعابير ذات الشكل $a-b$ حيث يكون a و b عددين (موجبين) و $a>b$.

ويتابع: "فمن المفيد أن يكون من يبدأ بقراءة رسالتنا هذه، متمرّناً على جمع التعابير وطرحها ومضاعفتها، وعلى كيفيّة جمع تعابير موجبة وسالبة[٣٣] غير متطابقة[٣٤] إلى تعابير أخرى هي نفسها موجبة أو حتّى موجبة وسالبة، وأخيراً إلى كيفيّة طرح تعابير موجبة وأخرى سالبة من تعابير أخرى، تكون إمّا موجبة أو أيضاً موجبة وسالبة"[٣٥].

وبعد ذلك يقول:

"ثمّ إذا نتج من مسألة ما أنّ تعابير معيّنة تساوي تعابير مماثلة لها ولكن غير مطابقة، يجب أن نطرح من الجهة ومن الأخرى[٣٦] (العوامل) المتشابهة بعضها من البعض، إلى أن نحصل على تعبير واحد مساوٍ لتعبير واحد. وإذا تواجدت، بشكل ما، تعابير سالبة، إن من ناحية (واحدة) أو من ناحية وأخرى، يجب إضافة هذه التعابير السالبة من الناحية ومن الأخرى، حتّى تصبح التعابير موجبة من الناحية ومن الأخرى، ومن ثمّ نطرح مجدّداً (العوامل) المتشابهة، بعضها من البعض، إلى أن يبقى تعبير واحد مساوياً لتعبير واحد من الناحية ومن الأخرى". ويعيد: "طبّق ذلك ببراعة على معطيات القضايا، وبقدر الإمكان، إلى أن يبقى تعبير واحد مساوياً لتعبير واحد ...".

---

[٣٣] أي أنّها تحوي حدوداً موجبة وأخرى سالبة.

[٣٤] أي، بحسب بول فير إيك، أنّها تحوي حدوداً موجبة وأخرى سالبة بمعاملات مختلفة.

[٣٥] أنظر الملحوظة ما قبل السابقة.

[٣٦] أي، بمفهومنا العصري، من كلا طَرَفي المعادلة.

٣–٤. عيّنة من مسائل كتاب ديوفنطس.

نقدّم في ما يلي عيّنة من مسائل كتاب ديوفنطس، بإمكانها إعطاء فكرة، ولو غير كافية، عن طريقة طرحه للمسائل وعن بعض أساليبه في حلّها. نُذكّر أنّ المسائل مقدّمة على شكل قضايا.

القضيّة I.1: "اقسم عدداً إلى عددين يكون االفرق بينهما مُعطىً".

القضيّة I.2: "اقسم عدداً إلى عددين تكون النسبة بينهما معطاة".

القضيّة I.3: "اقسم عددا إلى عددين تكون النسبة بينهما معطاة، بفرق معطى". (أنظر [Ver Eecke, 1926, p. 9-10]).

أسلوب ديوفنطس في حلّ هذه المسائل هو نفسه: نصّ المسألة عام، (أي أنّه ينطبق على الأعداد عامّة). إلاّ أنّ ديوفنطس يطبّقها على معطيات عدديّة يختارها هو. على سبيل المثال، المسألة الأولى (التي، إذا افترضنا أنّ العدد المطلوب قسمته هو a، وأنّ الفرق بين القسمين هو b) تتحوّل، بلغة عصريّة إلى إيجاد عددين : x وy، بحيث يكون $x+y=a$ و $x-y=b$). يحلّها ديوفنطس آخذاً $a=100$[٣٧] و $b=40$. ونقدّم فيما يلي نصّ حلّها كما ورد في كتابه:

"ليكن العدد المعطى 100 وليكن الفرق 40 وِحدة. جِد العددين.

نفرِض أنّ (العدد) الأصغر أَريتم واحِد. فيكون الأكبر أَريتماً زائداً 40 وِحدة. يصير بالتالي مجموع العددين أَريتمين زائدين 40 وِحدة. ولكنّ الـ 100 وِحدة المعطاة هي ذلك المجموع. فتكون 100 وِحدة تساوي أَريتمين زائدين 40 وِحدة. نطرح المتشابهات من المتشابهات، أي 40 وِحدة من 100، وأيضا 40 وِحدة من 2 أَريتم زائد 40 وِحدة. فالـ 2 أَريتم الباقيان يقدُران 60 وِحدة ويصير كلّ أَريتم 30 وِحدة.

وبالرجوع إلى ما فَرضنا، سيكون العدد الأصغر30 وِحدة، بينما يكون الأكبر 70 وِحدة، والتحقّق من ذلك (أي من أنّ هذين العددين يحقّقان شروط المسألة) أمرٌ بديهي".

[٣٧] الأعداد مكتوبة بالأرقام التي كانت معتمدة في التقليد اليوناني القديم (بأحرف أبجديّة) ولكنّنا نقلناها كما أوردها بول فير إيك.

المسألة II.8: "اقسم مربّعا معطىً إلى مربّعين".

"نفترِض أنّنا نقسم 16 إلى مربّعين. نفرِض العدد الأوّل مربّع أَريتم. فيكون العدد الآخر 16 وِحدة إلاّ مربّع أَريتم. فيجب ان تكون 16 وِحدة إلاّ مربّع أَريتم تساوي مربّعا.

نُشَكِّل مربّع كمّية أيّاً كانت من الأَريتمات ناقصة العدد من الوحدات التي يحويها جذر 16 وِحدة. فليكن ذلك مربّع 2 أَريتم ناقص 4 وِحدات. هذا المربّع هو 4 مربّعات أَريتم زائدة 16 وِحدة، وناقصة 16 أَريتم. فلنساوِه بـ 16 إلاّ مربّع أَريتم. نزيد الحدود السالبة من هذه الجهة وتلك، ونطرح المشابهات من المشابهات. فنحصل على 5 مربّعات أَريتم تساوي 16 أَريتماً، فيصبح الأَريتم $\frac{16}{5}$.[٣٨] فيكون احد العددين $\frac{256}{25}$، والآخر $\frac{144}{25}$. وهذان العددان مجموعان يعطيان 16 وِحدة، وكلّ منهما مربّع". [Ver Eecke, 1926, pp. 53-54] [٣٩].

فيما يخصّ هذه (حلّ المعادلة $x^2+y^2=z^2$ بالأعداد الموجبة الصحيحة)، يلحظ بول فير إيك أنّها سَبَّبت الملحوظة الشهيرة التي كتبها فيرما (Pierre Fermat, 1601-1665)، على هامش نسخته من أوّل تحقيق لكتاب ديوفنطس، وهو التحقيق الذي قام به باشيه دو

---

[٣٨] لم يستخدم ديوفنطس خطّ أو عصا الكِسر، ولكنّنا ننقل هنا الكتابة الكسريّة كما أوردها بول فير إيك؛ بدل $\frac{16}{5}$، إقرأ "ستة عشر خُمساًً" وبدل $\frac{144}{25}$، إقرأ "خمساً وعشرين جزءاً من مءة وأربعة وأربعين".

[٣٩] تعود المسألة، بلغة عصريّة، إلى حلّ المعادلة $x^2+y^2=a^2$، بالأعداد المنطَقة، حيث يكون a عدداً معطىً. يضع ديوفنطس المعادلة على الشكل (١): $y^2=a^2-x^2$ ويستعمل، على عادته، طريقة فذّة لحلّها إذ يفتّش عن الحلول ذات الشكل $y=bx-a$. يحصل على $y^2=b^2x^2+a^2-2abx$، فتعطيه المعادلة (١) ما يلي: $b^2x^2+a^2-2abx=a^2-x^2$. ثمّ يضيف $2abx+x^2$ إلى كلا طرفي المعادلة، ويطرح منهما a^2 فيحصل على $(b^2+1)x^2=2abx$، ومنها على $x=\frac{2ab}{b^2+1}$. فيكون $x^2=\frac{4a^2b^2}{(b^2+1)^2}$، و $y^2=(bx-a)^2=\frac{(ab^2-a)^2}{(b^2+1)^2}$. وهو يأخذ $a^2=16$، وعند الحل يأخذ $b=2$، فيحصل على $x^2=\frac{256}{25}$ و $y^2=\frac{144}{25}$.

ميزيرياك (Bachet de Méziriac: 1581-1638) باليونانيّة واللاتينيّة عام ١٦٢١. تلك الملحوظة تُعطي بالشكل التالي نصّ ما بات يُعرَف منذ ذلك الحين بِ "مبرهنة فيرما الكُبرى": "وخلافاً لذلك، من المستحيل أن يُقسَم مُكعَب إلى مُكعبين أو مربّع مضاعف إلى مربّعين مُضاعفين، أو، عامّةً، أيّة قوّة كانت غير قوّة المربّع إلى قوّتين أخريين من الدرجة نفسها. وقد اكتشفتُ برهاناً لهذا الأمر، رائعاً بالفعل، ولكنّ هذا الهامش أصغر من أن يحتويه" [Ver Eecke, 1926, p. 53].

"معادلات من الدرجة الثانية".

المسائل التي يمكن إعادتها إلى حلّ معادلات من الدرجة الثانية، هي القضايا ٢٧ و٢٨ و٣٠ من الكتاب الأوّل. وقد سبق ولحظنا (في الفقرة ٣-٢، أعلاه) أنّ ديوفنطس حلّها دون أن يحوّل المسألة المطروحة إلى أحد أشكال هذا النوع من المعادلات.

القضيّة I.27: "جِد عددين يكون مجموعهما وضربهما عددين مُعطَيين".

القضيّة I.28: "جِد عددين يكون مجموعهما ومجموع مربّعيهما عددين مُعطَيين".

القضيّة I.30: "جِد عددين يكون الفرق بينهما وضربهما عددين مُعطَيين". [Ver Eecke, 1926, pp. 36-40].

وهذا هو نصّ الحلّ الذي يعطيه ديوفنطس للقضيّة I.27: "يجب في كلّ حال أن يكون مربّع نصف مجموع العددين المطلوبين يفوق ضربهما بمربّع[٤٠]؛ وهذا الأمر قابل للتشكيل[٤١].

نفترض أنّ مجموع العددين ٢٠ وِحدة وأنّ ضربهما يشكّل ٩٦ وِحدة. ليكن الفارق بين العددين ٢ أَريتم. وبما أنّ مجموع العددين ٢٠ وِحدة، فإذا قسمناه إلى قسمين متساويين، يكون كلّ قسم نصف المجموع ، أي ١٠ وِحدات. فإذا جمعنا نصف الفارق، أي ١ أَريتم، إلى أحد القسمين، وطرحناه من القسم الآخر، سيكون مجموع العددين (الحاصلين) ٢٠ وِحدة والفارق

[٤٠] هذا الشرط يعبّر عن أنّ ديوفنطس لا يقبل الحلول غير المنطَقة، أنظر نهاية شرحنا للحلّ، أدناه.

[٤١] يبدو كما يقول بول فير إيك أنّ هذه الجملة غريبة عن نصّ ديوفنطس وأنّها قد أضيفت إليه من قِبَل أحد شارحيه (أو قرّائه). وهي تعني أنّ هذا الشرط هو قضيّة يمكن ترجمتها هندسيّاً وتمثيلها بشكل هندسي. وهو في الواقع شرط مكافئ للقضيّة II.5 من "أصول" أقليدس.

بينهما ٢ أَريتم. لذا نفرض أنّ (العدد) الأكبر بين العددين هو ١ أَريتم زائداً الـ ١٠ وِحدات التي هي نصف المجموع؛ فيكون الأصغر ١٠ وِحدات إلاّ ١ أَريتم، فيتحقّق كون مجموع العددين يشكّل ٢٠ وِحدة والفارق بينهما ٢ أَريتم.

يجب أيضاً أن يكون ضرب العددين ٩٦ وِحدة. ولكنّ ضربهما هو ١٠٠ وِحدة إلاّ ١ مربّع أَريتم. نساويه بـ ٩٦ وِحدة، فيصبح الأَريتم وِحدتين. بالتالي يكون الأكبر ١٢ وِحدة والأصغر ٨ وِحدات؛ وهذان العددان يحقّقان شروط القضيّة" [Ver Eecke, 1926, pp.36-38].

تعود المسألة I.27 إلى إيجاد عددين x و y بحيث يكون $x+y=a$ و $x.y=b$، حيث يكون a وb عددين مُنطقين. يقدّم ديوفنطس الحلّ في حالة كون $a=20$ و $b=96$، ويعود حلّه إلى ما يلي: يأخذ مجهولاً مساعداً، t، فيضع $x-y=2t$، فيكون $x=10+t\ (=\frac{a}{2}+t)$، و $y=10-t\ (=\frac{a}{2}-t)$، فيكون: $x.y=\frac{a^2}{4}-t^2=b$؛ أي $t^2=\frac{a^2}{4}-b$، (فيكون $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$ و $y=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$)، أي $t^2=100-96$ وهكذا يكون $t^2=4$، $t=2$، $x=12$ و $y=8$. العلاقة $\frac{a^2}{4}-b=\left(\frac{a}{2}\right)^2-b=t^2$ تعني أنّ الشرط الذي يطلبه ديوفنطس (وهو أن يكون مربّع نصف مجموع العددين المطلوبين يفوق ضربهما بمربّع) مُحَقَّق. يجب الانتباه إلى أنّ ديوفنطس يقصد بكلمة "مربّع" الأخيرة، "عدداً مربّعاً، ليكون بالتالي x و y، عددَين منطَقين.

ملاحظة. الطريقة التي استخدمها ديوفنطس هنا، واضعاً $x=\frac{a}{2}+t$ و $y=\frac{a}{2}-t$، (عندما يكون $x+y=a$) سبق أن استُخدِمت في الرياضيات البابليّة (١٨٠٠ق.م-٣٠٠م) من أجل حلّ نظم معادلات من النوع الذي تعرّض له ديوفنطس (I.27, I.28, I.30)، [Dahan-Delmico et Peiffer, 1986, pp. 73-75]. واستُخدِم في الرياضيات البابليّة مجهول مساعد بالأسلوب نفسه: $x=s+\frac{a}{2}$ و $y=s-\frac{a}{2}$، عندما يكون $x-y=a$؛ وذلك ما

فعله أيضاً ديوفنطس في حلّه للمسألة I.30، وهي: $x - y = a$ و $x . y = b$). وكان أبو كامل (٨٣٠–٩٠٠م) استخدم التحويل نفسه في ظروف مشابهة[٤٢].

***

المراجع

***في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربيّة وبلغة أخرى، جرت ترجمتها إلى العربيّة ومتوفّرة باللغتين.**

Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Anbouba, A. 1979. "Un traité d'Abū Jaʿfar al-Khāzin sur les triangles rectangles numériques", *Journal for the history of Arabic Science*, vol. 3, n o 1, pp. 134 -156.

أنبوبا، عادل. ١٩٧٩. "رسالة أبي جعفر الخازن في المثلّثات القائمة الزوايا". مجلّة معهد التراث العلمي العربي – جامعة حلب، المجلّد ٣، العدد ١، ١٩٧٩، ص. ٣–٢٤.

Bellosta, H. 2010. "La réception de la science arabe en Europe", dans *Encyclopédie des relations sociales entre le monde islamique et l'Occident*, supervisée par Samir Sleimane, (Téhéran 2010). Publié aussi sur le site de l'Equipe d'Etude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe: www. histosc.com.

بلّوستا، هيلين، ٢٠١٠. "استقبال العلم العربي في أوروبا": نُشِر في "موسوعة تاريخ العلاقات بين العالم الإسلامي والغرب"، تأليف نخبة من الأكاديميين؛ إشراف د.سمير سليمان، (٩١٨ صفحة من القطع الكبير)؛ إصدار المجمع العالمي للتقريب بين المذاهب الإسلامية، بيروت/ طهران. والمقال منشور أيضاً في الموقع الإليكتروني للجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة: www. histosc.com.

Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales,* Seuil, Paris.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement axiomatique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

[٤٢] أنظر [فارس، ٢٠١٧، الفصل الرابع، الفقرة ١، الملحوظة الإضافيّة ١–٣–١].

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l’algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس، ن. ٢٠١٧. "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت..

Rashed, R. 1984 (1). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.

راشد، ر. ١٩٨٩. "تاريخ الرياضيات العربية – بين الجبر والحساب" مركز دراسات الوحدة العربيّة –بيروت. نقله إلى العربيّة د. حسين زين الدين عن صيغته الفرنسيّة.

Rashed, R. 1984 (2). *Diophante : Les Arithmétiques, Tome III : Livre IV*. “Collection des Universités de France”, Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 1984 (3). *Diophante : Les Arithmétiques,Tome IV : Livres V, VI, VII*. “Collection des Universités de France”, Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R. 2003. “Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes”, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIII, Numero 2, Dicembre 2003, Pisa-Roma, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, MMV, pp. 55-73.

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

راشد، ر. ٢٠١٠. "رياضيّات الخوارزمي– تأسيس علم الجبر"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، صدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ترجمة عن الأصل الفرنسي المذكور ([Rashed, 2007]).

Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Sésiano, J. 1982. *Books IV to VII of Diophantus’* Ariyhmetica *in the Arabic translation attributed to Qusta ibn Lūqā*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Taton, R. (sous la direction de), 1957. *Histoire générale des sciences*, vol. 1, "*La science antique et médiévale*", sous la direction de P.U.F, Paris..

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d’Alexandrie : les six livres d’arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècle)*, Vrin, Paris.