أبو كامل (شجاع بن أسلم المصري)

حياته وأعماله وكتابه الجبري

بقلم نقولا فارس (١-١٢-٢٠١٧)

"فريق الدراسة والبحث في التقليد العلمي العربي"

(الجمعيّة اللبنانيّة لتاريخ العلوم العربيّة)

هذه الدراسة مقتطعة من الفصل الرابع من كتاب نقولا فارس: "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت، ٢٠١٧.

١. حياته وأعماله.

أبو كامل، شجاع بن أسلم الحاسب المصري، كان مهندساً لبناء السفن البحريّة، عاش في مصر وعمل هناك تحت حكم أحمد بن طولون (٨٦٨-٩٠٥م). وقد قدّر بعض مؤرّخي العلوم المحدَثين الغربيّين أنّ حياته تقع في الفترة (٨٥٠-٩٣٠م)، ولكنّ الباحث ر. راشد قام بتعديل تلك الفترة لتصبح (٨٣٠-٩٠٠م)، وهي فترة تقريبيّة أيضاً. وكان أبو كامل رياضيّاً لامعاً ألّف العديد من الكتب في مجالات مختلفة، ومنها الجبر.

نُشرتِ منذ بداية القرن العشرين دراسات عديدة حول جبر أبي كامل[1]، ولكنّنا نعتمد هنا على ثلاث منها. قام بالدراستين الأوليين أ. ب. يوشكيفتش

[1] يذكر كتاب ر. راشد [Rashed, 2012, pp. 812-819] منها تلك العائدة لـ: هـ. سوتر (H. Suter) عام ١٩٠٨، وكاربنسكي (L. C. Karpinsky) عامي ١٩١٢ و١٩١٤، وج. واينبرغ (J. Weinberg): كتاب نُشِر عامي ١٩٣٤

[Youschkevitch, 1976, pp. 52-61] وعادل أنبوبا [Anbouba, 1978, pp. 78-88]. لا ترتكز الدراسة الأولى على الكتاب مباشرة، إنّما على ترجمتين له، إحداهما باللاتينيّة وأخرى بالعِبريّة القديمة. أمّا دراسة ع. أنبوبا فترتكز إلى النص العربي المخطوط للكتاب، وهو المخطوط الوحيد منه الذي بقي إلى عصرنا. وحديثاً، عام ٢٠١٢، نشر ر. راشد كتاباً ضخماً بالفرنسيّة بعنوان "أبو كامل والتحليل الديوفنطسي"، قام فيه بتحقيق لذلك المخطوط وبتحقيق نقديّ لرسالة في التحليل العددي لأبي كامل تحمل عنوان "كتاب الطير"[٢]، مع دراسة تاريخيّة ورياضيّة لكلّ من العملين وترجمة لهما إلى اللغة الفرنسيّة [Rashed, 2012]. الدراسات المذكورة، وخاصّة منها هذا الكتاب، كانت عوناً كبيراً لنا في كتابة هذه الفقرة.

وصل إلى عصرنا ١١ عنواناً لكتب أو رسائل ألّفها أبو كامل. تسعة من تلك العناوين أوردها ابن النديم وهي: ١) كتاب الفلاح، ٢) كتاب مفتاح الفلاح، ٣) كتاب الجبر والمقابلة، ٤) كتاب العصير، ٥) كتاب الطير، ٦) كتاب الجمع والتفريق، ٧) كتاب الخطأين، ٨) كتاب المساحة والهندسة، ٩) كتاب الكفاية. أمّا المفَهرس المتأخّر حاجي خليفة (١٠١٧-١٠٦٧هـ = ١٦٠٩- ١٦٥٧م)، فيضيف إلى

و١٩٣٥، وم. ليفي (M. Levey) عام ١٩٧٠، و ج. سيزيانو (J. Sésiano) عام ١٩٩٣، وأ. ب. يوشكيفيتش (A. P. Youschkevitch) عام ١٩٦٤ بالروسيّة وعام ١٩٧٦ بالفرنسيّة، وع. أنبوبا عام ١٩٧٨.

[٢] ورد عنوان هذه الرسالة مع العناوين التي أوردها ابن النديم وظنّ مؤرّخو العلوم أنّها فقدت، إلى أن أثبت ر. راشد أنّها هي نفسها الرسالة ذات العنوان "طرائف الحساب" وهو عنوان لم يرد في المراجع القديمة، فاستنتج أنّ أحد قدماء النسّاخ قد يكون تسبّب في ذلك التغيير لعنوان "كتاب الطير". وكان سبق أن نَشَرَ سامي شلهوب (مجلّة تاريخ العلوم العربيّة-معهد التراث العلمي-جامعة حلب، العدد١٢، ١-٢، ص. ٢٣٧-٢٦٤) نَصّ هذه الرسالة بعنوان "كتاب الطرائف في الحساب" [Rashed, 2012, pp. 27-30].

لائحة ابن النديم، العنوانين التاليين: ١٠) حساب الدور والوصايا، و١١) كتاب الوصايا بالجذور. هذه العناوين، لا تدلّ على الأرجح سوى على تسعة كتب، نظراً لتشابه عنوانين منها مع آخرَين. ويعطي ر. راشد لمحة تاريخيّة حول "الكتب الثلاثة التي توجد نصوصها العربيّة: كتابا أبي كامل اللذان حقّقهما ودرسهما في كتابه (وهما "كتاب الجبر والمقابلة"، في الجبر والتحليل العددي غير المحدّد[٣]، و"كتاب الطير"، في التحليل العددي غير المحدّد من الدرجة ١ بالأعداد الصحيحة[٤])، و"كتاب المساحة والهندسة" الذي يتوجّه إلى المبتدئين لتعليمهم أساليب قياس الأراضي بواسطة الجبر [Rashed, 2012, pp. 1-31].

٢. نظرة سريعة إلى جبر أبي كامل.

طوّر أبو كامل بشكل ملحوظ جبر الخوارزمي (الثلث الأوّل من القرن التاسع م.) بكلّ فصوله النظريّة، وأوضح العديد من تلك الفصول. ويشعر قارئ كتابه الجبري، منذ الصفحات الأولى، بأنّ ذلك الرياضي قصد أن يبني جبر الخوارزمي على القاعدة الصلبة التي يمثّلها كتاب "الأصول" لأقليدس (القرن ٤–٣ ق. م.). فقد قدّم تبريرات هندسيّة لخوارزميّات حلول معادلات الدرجة الثانية، ثلاثيّة الحدود، تستند بشكل صريح إلى القضيّتين II. 5 وII. 6 من ذلك الكتاب وأضاف إليها خوارزميّات تستخرج "المال" (x^2) في تلك المعادلات دون المرور باستخراج "الجذر" (x)، مع

[٣] أو المسائل العدديّة "غير المحدودة"، بحسب تعبير أبي كامل: "وإنّا نبيّن الآن كثيراً من المسائل التي هي غير محدودة ويسمّيها بعض الحسّاب سيّالة، أعني بها أن نخرج بصوابات كثيرة بقياس مُقنِع ومذهب واضح، منها ما يدور بين الحسّاب بالأبواب بلا علّة قائمة يعملون عليها،ومنها ما استخرجته بأصل صحيح وحيلة سهلة كثيرة المنفعة".

[٤] حيث الأعداد الصحيحة تشير إلى أعداد الطيور مختلفة الأجناس، في المسائل التي يطرحها ويحلّها في رسالته هذه؛ وسنذكر إحدى تلك المسائل في حواشي الفقرة ٣، أدناه.

تبريراتها الهندسيّة؛ كما أضاف تبريراً هندسيّاً لحلّ المعادلة $bx = ax^2$، التي أعطى الخوارزمي حلّها دون تبرير. وقدّم كذلك تبريرات هندسيّة لقواعِد ضرب ذوات الحدّين ولقواعد أخرى في الحساب الجبري، مستخدماً فيها استدلالات هندسيّة من الكتاب الثاني من "الأصول".

وبالرغم من كثافة الاستدلالات الهندسيّة في كتاب أبي كامل، وأهميّتها، إلاّ أنّ عمله الجبري في هذا الكتاب كان أيضاً مطبوعاً بالاتجاه الحسابي بشكل واضح. فقد وسّع عمليّة القسمة من مجال الأعداد إلى مجال المقادير الجبريّة وذلك بربطه هذه العمليّة بعمليّة الضرب بواسطة نظريّة التناسب الأقليديّة. واستخدم لتبرير بعض قواعد الحساب الجبري (خاصّة تلك التي تدخل فيها القسمة) استدلالات بواسطة قضايا حسابيّة (من الكتاب السابع) إضافة إلى نتائج أخرى في نظريّة التناسب (من الكتابين الخامس والسادس من "الأصول")[٥].

في بداية كتابه، يُدخِل أبو كامل المقادير الثلاثة التي يردّها إلى الخوارزمي، وهي "الجذر" (أو "الشيء") و"المال" و"العدد". ويبدأ، على غرار ما فعل الخوارزمي، بالفصل المخصّص لنظريّة المعادلات من الدرجتين الأولى والثانية، ويُتبِع ذلك الفصل بفصلين آخرين: الأوّل منهما يعالج الحساب الجبري، والثاني يحتوي على تمارين عمليّة تطبيقاً للفصلين النظريّين السابقين. ولكنّه يوسِّع عِبر كتابه قوى المجهول وصولاً إلى القوّة الثامنة، ويستخدم، لتحديد تلك القوى، التشكيل الجمعي للأسوس[٦]، على

[٥] أنظر بعض الأمثلة في الملحوظات الإضافيّة: ٣، أدناه.

[٦] أس x^n هو العدد n. بالإضافة إلى "الشيء" (x) و"المال" (x^2)، استخدم أبو كامل الـ"كعب" (x^3) والـ"مال مال" (x^4)، والـ"مال مال شيء" (x^5)، والـ"كعب كعب" (x^6)، والـ"مال مال مال مال" (x^8). نُذَكِّر هنا بأنّه لم يكن يعلم بوجود

غرار ما فعل ديوفنطس (حوالى القرن الثالث م)، مُغفلاً (كما فعل هذاالأخير) القوّة السابعة. المعادلات التي ظهرت فيها تلك القوى كانت غالباً من الشكل $ax^{2n+p} + bx^{n+p} = cx^{p}$ التي تتحوّل إلى معادلات من الدرجة الثانية[٧] (وهو شكل نجده عند رياضيّين معاصرين لأبي كامل مثل سنان بن الفتح). إضافة إلى ذلك، وبينما لا يستخدم الخوارزمي سوى مجهول واحد، يتعامل أبو كامل مع عدّة مجاهيل[٨]. ويحوّل المسائل التي يضعها إلى معادلات (أو إلى أنظمة معادلات) يحلّها مستخدماً في بعض الأحيان عدّة طرائق، منوِّعاً في حلّها التقنيّات الجبريّة (الحذف، الاستبدال، إدخال مجهول مساعد، تغيير المجهول للحصول على معادلة من نوع معروف الحلّ)[٩].

وكان أبو كامل أحد أوائل اللذين استخدموا المقادير التربيعيّة غير المنطقة في الجبر، كمجاهيل، وكان أوّل من أدخلها كمعامِلات للمعادلات[١٠]. ويجب أن نشير

كتاب ديوفنطس الحسابي [Rashed, 2012, p. 53]، وأنّ تسمياته لقوى المجهول اختلفت عن تلك التي اعتمدها ديوفنطس الذي، على سبيل المثال، سمّى x^5 "مال كعب" أو "مربّع كعب" ...

[٧] على سبيل المثال، يحوّل أبو كامل نظام المعادلات التالي: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x.z = y^2 \\ x.y = 10 \end{cases}$، حيث $(x < y < z)$، إلى المعادلة التالية: $x^8 + 100x^4 = 10000$، ويعطي حلّها: $x = \sqrt[4]{\sqrt{12500} - 50}$ [Rashed, 2012, pp. 99-100]. (راجع، في نصّ أبي كامل، المسألة رقم ٦٥، في "باب المسائل المختلِفة" ص. ٤٧٩–٤٨١).

[٨] يعطي أحياناً أسماء خاصّة لهذه المجاهيل مثل "الجذر" أو "الشيء" للمجهول الأوّل و"الدينار" للثاني، و"الفلس" للمجهول الثالث، و"الخاتم للرابع".

[٩] الحذف هو عمليّة الاستغناء عن أحد المجاهيل (أو بعضها) عندما يسمح شكل نظام المعادلات بذلك.

[١٠] أنظر الملحوظة الإضافيّة ٣–٢، أدناه. وكان الماهاني (...–٨٨٠) قد استخدم المقادير غير المنطقة كمجاهيل في معادلات جبريّة [Ben Miled, 2005, pp. 9-10]، راجع أيضاً [Farès, 2009] و[فارس، ٢٠١٦، الفصل ١، §٢].

إلى أنّ التعامل مع المقادير غير المنطقة كأعداد هو أمر في غاية الأهمّية لأنّه يؤشّر إلى بداية تقليد رياضيّ كامل، تطوّر خلال عدّة أجيال. هذا التقليد استخدم الجبر لقراءة وشرح وتطوير نظريّة المقادير غير المنطَقة (الكتاب العاشر من "أصول" أقليدس). فبدءاً من الماهاني (٨٢٥–٨٨٣) ووصولاً إلى السموأل (القرن ١٢م.)، يضمّ هذا التقليد أسماء تشكّل لائحة طويلة من كبار الرياضيّين[١١]. أسهمت أعمال هؤلاء بتطوير العلم الجديد الذي هو الجبر عن طريق إدخاله في دراسة حقل إضافي غنيّ جدّاً بالتمارين الجبريّة هو حقل المقادير غير المنطَقة[١٢]. ولكنّ الأمر الأهمّ هو أنّ تلك الأعمال أدّت إلى تغيير وجه نظريّة المقادير غير المنطَقة؛ فلم تعد تلك المقادير أدوات هندسيّة فحسب، كما أدخلها أقليدس، بل أضحت كائنات جبريّة يمكن أن تُطبّق عليها كلّ الحسابات المستخدمة في الجبر.

وكان أبو كامل أيضاً أوّل رياضي يُدخِل التحليل غير المحدّد من الدرجتين الأولى والثانية، كفصل مستقلّ من فصول الكتب الجبريّة. فقد خصّص لهذا المجال الرياضي قسماً مهمّاً من كتابه الجبري. يضمّ هذا القسم ٤٣ مسألة تعود إلى أنظمة معادلات ذات حلول مُنطَقة (إذا ما وُجِدت). ونعيد هنا ما يلاحظه ر. راشد الذي كتب: "لم يتطرّق الخوارزمي إلى مثل هذه الدراسة في كتابه. أمّا ديوفنطس، الذي

[١١] تتضمّن هذه اللائحة أسماء منها: الماهاني، سليمان بن عِصمة، وأبو جعفر الخازن، والأهوازي (القرن العاشر)، وابن البغدادي والكرجي (القرن ١١)، والفرَضي والسموأل (القرن ١٢) [Ben Miled, 2005, pp. 9-10]، راجع أيضاً [فارس، ٢٠١٦].

[١٢] استخدم الرياضيّون من التقليد العربي، منذ الماهاني، معادلات من الدرجة الثانية لحساب الجذور التربيعيّة لذوات الحدّين وللمنفصلات (أي للمقادير غير المنطقة x من الشكل $x = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$، أو $a \pm \sqrt{b}$، أو ...، حيث a وb، هي أعداد مُنطقة) راجع [Ben Miled, 2005].

سبقهما بقرون، وعلى الرغم من أنّه درس في كتاب "الحساب"، وبشكل أساسيّ مسائل غير محدّدة، إلاّ أنّه لم يُميِّز، لا بين المسائل المحدّدة والمسائل غير المحدّدة، ولا بين المسائل الممكنة وتلك المستحيلة. ولكنّ التمييز تحقّق مع أبي كامل بشكل صارم؛ والأهمّ من ذلك، نستطيع القول إنّ أبا كامل بحث عن تشكيل "جبر للمسائل غير المحدّدة" أي عن تأسيس فصل رياضيّ جديد هو فصل التحليل غير المحدّد. وقد أسهم البحث في هذا الفصل بعد أبي كامل، في توسيع مجال الحساب الجبريّ وإغنائه بخوارزميّات جديدة وكذلك بطرق برهان جديدة مثل طريقة الحذف. لذا يمكننا أن نرى في هذا الحدث بداية مسيرة طويلة في مجال التحليل غير المحدّد كما في مجال الحسابات الجبريّة المجرّدة" [Rashed, 2012, p. 145]. ويُعبّر أبو كامل بوضوح عن نيّته في تأسيس هذا الفصل الرياضي. ففي مقدّمة الفصل الذي خصّصه للمسائل غير المحدّدة أو "غير المحدودة"، بحسب تعبيره، يقول: "وإنّا نبيّن الآن كثيراً من المسائل التي هي غير محدودة ويسمّيها بعض الحسّاب سيّالة -أعني بها أن تخرج بصوابات كثيرة- بقياس مُقنِع ومذهب واضح، منها ما يدور بين الحسّاب بالأبواب بلا علّة قائمة يعملون عليها، ومنها ما استخرجته بأصل صحيح وحيلة سهلة كثيرة المنفعة".
وفي مقدّمته الطويلة لـ"كتاب الطير" يقول: "إنّي رأيت صنفاً واحداً من أصناف الحساب يدور بين الخاصّ والعام والعالم والجاهل، ويتلاهون به ويستحسنونه ويستظرفونه، ويسألون بعضهم بعضاً فيجيب من أجاب منهم بالظنّ والحدس ولا يرجعون فيه إلى أصل ولا قياس ... فرأيت أن أؤلّف كتاباً في هذا الصنف وأسهّل العمل فيه وأقرّب مأخذه وأدلّ على استخراج الصواب في المسألة التي يمكن فيها ذلك، وأبيّن ما كان لا يمكن فيه إلاّ جواب واحد وأشرح ما لا يمكن فيه جواب البتّة

بعمل صحيح وقول برهاني حتّى آتي على المسألة التي أعلمتك أنّ فيها ألفين وستمائة وستّة وسبعين جواباً صواباً..." [Rashed, 2012, p. 579, et p. 733].

في الكتاب الأخير هذا، الذي استمرّ لمدّة طويلة معروفاً تحت عنوان "كتاب الطرائف في الحساب" والذي برهن ر. راشد مؤخّراً بأنّه هو في الواقع "كتاب الطير"، يقدّم أبو كامل دراسة "يفتتح فيها مجال التحليل الديوفنطسي من الدرجة ١ بالأعداد الصحيحة، وهو كما يقول ب. تانِّري (*P. Tannery*)، مجال غريب عن ديوفنطس" [Rashed, 2012, p. 219]. المسائل الست التي يقدّمها أبو كامل في هذا الكتاب اختارها لتكون أمثلة من العمل في هذا المجال. وهو يترجم كلّ واحدة من تلك المسائل إلى نظام من المعادلات من الدرجة ١، متعدّدة المجاهيل، ويفرض أن يكون حلّها بالأعداد الصحيحة[١٣]. المسألة الأولى منها لها حلّ وحيد، والثانية لها ستّة حلول، والثالثة لها ٩٨ حلاًّ (أعطى منها أبو كامل ٩٦) والرابعة لها ٣٠٤ حلول والخامسة مستحيلة والسادسة لها ٢٦٧٨ حلاًّ، أعطى منها ٢٦٧٦ حلاًّ.

وظهرت عند أبي كامل ممارسة مهمّة في مسيرة استقلال الجبر عن الهندسة، وإن لم يكرّرها كثيراً، وهي عدم احترام التجانس. فهو تارة يتعامل مع مساحة تساوي

[١٣] نقدّم هنا، على سبيل المثال، نصّ المسألة الثالثة: "فإن دُفِعَ إليك مائة درهم، فقيل لك ابتع بها مائة طائر من أربعة أصناف، بطّ ودجاج وحمام وعصافير، البط بأربعة دراهم والعصافير بعِشر درهم والحمام كلّ إثنين بدرهم والدجاج بدرهم ..." (مع العلم بأنّ أبا كامل قال في بداية رسالته إنّه لا يقبل شراء طير غير كامل).

يحوّل أبو كامل هذه المسألة إلى نظام من معادلتين هو التالي: $\begin{cases} x + y + z + t = 100 \\ 4x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z + t = 100 \end{cases}$ ويعطي ٩٦ حلاًّ له (من أصل ٩٨).

جذر مساحة أخرى ("فسطح اه جذر سطح اج") لدى تبريره الهندسي لحلّ المعادلة $ax^2 = bx$، وطوراً يمثّل مساحة بقطعة من خط مستقيم (في الصورة الهندسيّة نفسها التي يمثّل فيها مساحة أخرى بمستطيل)، لدى استدلاله الهندسي على إيجاد x^2 دون المرور بـ x عند حلّ المعادلات التربيعيّة ثلاثيّة الحدود [Rashed, 2012, pp. 247, 257]؛ والتمثيل الأخير نجده فيما بعد عند خليفته من القرن الحادي عشر، أبي بكر الكرجي ([Woepcke, 1853, pp. 68-71] و[الكرجي (٢)، الفخري، "باب المسائل الست]"). نشير إلى أنّ عدم احترام التجانس كان له فيما بعد، ابتداءً من ديكارت، دور مهمّ في تطوير الجبر والهندسة الجبريّة.

٣. ملحوظات إضافيّة.

٣–١. أمثلة على تبرير إحدى قواعد الحساب (في الجبر).

١) يعطي أبو كامل القاعدة التالية $\frac{a}{b}=c \Rightarrow a=b.c$ (١) كما يلي: "إعلَم أنّك متى ما ضربت ما خرج من القسمة في المقسوم عليه، عاد المقسوم. ... وأنا واضع لهذا الباب شكلاً جامعاً ...". وهو يعطي هذه القاعدة لكي يستخدمها في برهان القواعد التي يعطيها بعدها. ولكي يبرّرها يستند إلى نموذج حسابي، فيتعامل مع a وb، وc، كأعداد صحيحة، ويستخدم (بشكل مُضمَر) القضيّة VII. 19 من "الأصول" التي يمكن أن نكتبها على الشكل: $a:b=c:d \Leftrightarrow a.d=b.c$ [١٤]، ويكون بذلك قد قام بتبرير حسابي لهذه القاعدة الجبريّة.

---

[١٤] نذكّر بأنّنا نشير دائماً بـ $a:b$ إلى نسبة a إلى b، وبـ $\frac{a}{b}$ إلى قسمة a على b.

٢) يمكننا كتابة "برهان" أبي كامل للقاعدة الجبريّة التالية $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$، بلغة عصريّة على الشكل التالي:

لدينا: $\begin{bmatrix} \sqrt{b}.\sqrt{b}=b \\ et \\ \sqrt{b}.\sqrt{a}.=\sqrt{a}.\sqrt{b} \end{bmatrix}$، فيكون: $\sqrt{b}:\sqrt{a}=b:\sqrt{a}.\sqrt{b}$ (٢)

ومن جهة أخرى لدينا:

$\begin{bmatrix} \sqrt{a}.\sqrt{b}.=\sqrt{a}.\sqrt{b} \\ et \\ \sqrt{a}.\sqrt{a}=a \end{bmatrix}$، فيكون لدينا: $\sqrt{b}:\sqrt{a}=\sqrt{a}.\sqrt{b}:a$ (٣)

والعلاقتان (٢) و(٣) تعطيان: $b:\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}:a$ (٤)

فيكون $a.b=\left(\sqrt{a}.\sqrt{b}\right)^2$ (٥)، وهذا ما يكافئ: $\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$.

ملاحظة: عندما يكون a وb عددين، تنتج العلاقتان (٢) و(٣) من القضيّتين VII. 17 و VII. 18 من "الأصول" وتنتج العلاقة (٥) من القضيّة VII. 19. ولكنّ أبا كامل لم يشر صراحة إلى ذلك.

٣) يعطي أبو كامل قاعدة الحساب التالية: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$، على الشكل التالي: "كلّ عددين يقسم أحدهما على الآخر فإنّ جذر ما يخرج من القسم مثل الذي يخرج من

قسمة جذر العدد المقسوم على جذر العدد المقسوم عليه". ثمّ يقدّم تبريراً حسابيّاً لقاعدة الحساب الجبري هذه، مستنداً بشكل مضمر إلى القضايا: VII. 17، و VII. 18 و VII. 19 و VI.22 وإلى القاعدة (١) $\frac{a}{b}=c \Rightarrow a=b.c$ (في المثل (١) أعلاه)، التي تُكتَب أيضاً $a=b.\frac{a}{b}$. ويمكن اختصار استدلال أبي كامل كما يلي[١٥]:

لدينا: $\left[a=b.\frac{a}{b}\ et\ b=b.1\right]$، من (١)، فيكون:

$$\left[1:b=\frac{a}{b}:a\right] \qquad (٦)،$$

ولدينا (بسبب العلاقة (١) أيضاً): $\left[\sqrt{a}=\sqrt{b}.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ \ et\ \ \sqrt{b}=\sqrt{b}.1\right]$،

فيكون لدينا بسبب القضيّتين VII. 17 و VII. 18 :

$$\left[1:\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}:\sqrt{a}\right] \qquad (٧)،$$

فيكون، استناداً إلى القضيّة VI. 22:

$$\left[1.1:\sqrt{b}.\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}:\sqrt{a}.\sqrt{a}\right] \qquad (٨)،$$

أي:

$$\left[1:b=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2:a\right] \qquad (٩).$$

---

[١٥] راجع نصّ أبي كامل في [Rashed, 2012, pp. 309-311].

ويتبيّن من مقارنة العلاقتين (٦) و (٩) أنّ $\left[a : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 = a : \frac{a}{b} \right]$، ومنها:

$\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 = \frac{a}{b} \right]$، أي $\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \right]$.

٣-٢. أمثلة على تنويع الاستدلالات الجبريّة وعلى معادلات ذات معاملات وجذور غير منطقة[١٦].

١) إحدى المسائل التي يطرحها أبو كامل هي التالية: "إذا قيل لك: عشرة قسمتها قسمين. فتضرب كلّ قسم في نفسه، وتلقي الأقلّ من الأكثر، فيبقى ثمانون"، وهي مسألة يمكن تحويلها إلى النظام التالي (من معادلتين):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ y^2 - x^2 = 80 \end{array} \right\} (x < y)$$ ،

ويحلّها أبو كامل بثلاث طرق: ١/ يحذف y عن طريق أخذ $y = 10 - x$، ووضع y بتلك القيمة في المعادلة الثانية؛ ٢/ يحذف x عن طريق أخذ $x = 10 - y$؛ ٣/ يأخذ مجهولاً مساعدا t ،حيث يكون:

$$x = 5 - t \left(= \frac{10}{2} - t \right);\ y = 5 + t \left(= \frac{10}{2} + t \right)$$

ثمّ يضع x وy بقيمتهما (بالسبة إلى t) في المعادلة الثانية.

[١٦] المسائل الثلاث في هذه الفقرة هي المسائل ذات الأرقام ٧، و٤٧، و ٦١، على التوالي في: [Rashed, 2012, pp. 84-85, 427-429, 95-97 et 459-461] . راجع أيضاً [Youschkevitch, 1976, pp. 56-58].

نُذكِّر بأنّ الطريقة الأخيرة هي تلك التي استخدمها ديوفنطس في حلّه للمسائل الثلاث التي يمكن إعادتها إلى معادلات من الدرجة الثانية (وهي المسائل I. 27، و I. 28، و I. 30) وأنّ هذه الطريقة تعود إلى الرياضيّات البابليّة[١٧].

٢) يحوّل أبو كامل المسألة التالية: "إذا قيل لك: عشرة قسمتها قسمين فقسمت كلّ واحد من القسمين على الآخر وجمعتهما، فكان جذر خمسة دراهم"، إلى المعادلة:

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}$$

التي يوسّعها مباشرة إلى التالية:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)x^2+100=\left(20+\sqrt{500}\right)x$$ ،

التي يحلهاّ بتطبيق خوارزميّة الخوارزمي المناسبة لصنفها. ثمّ يُقدّم طريقة أخرى، حيث يغيّر المجهول بوضعه $y=\frac{x}{10-x}$ لتتحوّل المعادلة إلى التالية:

$$y^2+1=\sqrt{5}.y$$

التي يحصل منها على y ثمّ على x.

٣) وفي مسألة أخرى يحصل أبو كامل على معادلة معاملاتها مقادير غير منطقة أكثر تعقيداً، وكذلك جذورها:

"مال تزيد على جذر نصفه ثلاثة دراهم وعلى جذر ثلثه درهمين ثمّ تضرب أحدهما في الآخر فيكون عشرين درهماً":

---

[١٧] راجع: [Ver Eecke 1926, prop. I. 27, I. 28, I. 30, pp. 36-40]، أو [Farès, 2017, ch.2, §2]، أو [Dahan-Dalmedico et Peiffer 1986, pp. 72-74]، أو [Rashed et Houzel, 2013, pp. 9-13].

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}x}+3\right).\left(\sqrt{\frac{1}{3}x}+2\right)=20$$

يوسّع المعادلة فيحصل على $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x}\right)=14-\sqrt{\frac{1}{6}x^2}$ ثمّ على المعادلة:

$$5x+\sqrt{24x^2}=196+\frac{1}{6}x^2-\sqrt{\left(130+\frac{2}{3}\right).x^2} \qquad (١)$$

المكافئة لـ:

$$\left(30+\sqrt{864}+\sqrt{4704}\right)x=x^2+1176$$

ويحصل على الحلّ (بطريقة الخوارزمي الموافقة لصنفها) :

$$x=15+\sqrt{216}+\sqrt{1176}-\sqrt{1617+\sqrt{1058400}+\sqrt{1016064}+\sqrt{194400}-1176}$$

ويلاحظ أنّه إذا أخذ، انطلاقاً من المعادلة (١)، $y=2x$ ، يحصل على حلّ أسهل من حيث الشكل:

$$x=15+\sqrt{2400}-\sqrt{1449+\sqrt{2160000}}$$

مع الإشارة إلى أنّه لا يستخدم الأرقام في هذه المسألة بل يعبّر عن الأعداد بالكلمات.

Ouvrages cités

***Dans ce qui suit, les références qui sont citées en français et en arabe, ont été traduites et publiées en cette dernière langue. La liste des ouvrages cités est extraite de celle du livre : [Farès, N. 2017].**

المراجع المذكورة

***في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربيّة وبلغة أخرى، جرت ترجمتها إلى العربيّة ومتوفّرة باللغتين. واللائحة التالية مقتطعة من لائحة مراجع الكتاب: [فارس، ن. ٢٠١٧].**

Anbouba, A. 1978. “L’algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles – Aperçu général”. *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Ben Miled, Marwan. 1999. “Les commentaires d’Al-Māhānī et d’un anonyme, du livre X des *Eléments* dÉuclide” *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 9, no 2, Septembre.

Ben Miled, M. 2005. *Opérer sur le continu*. Académie tunisienne Beït al-Hikma, Carthage.

Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales,* Seuil, Paris.

Farès, N. 2009. La notion d'irrationalité selon un mathématicien du X^{e} siècle: Abū Ja‘far al-Khāzin. *Lebanese Science Journal*, 10 (2) ; pp. 113-123.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement analytique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal,* Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2016. *Commentaire du Livre X des Éléments d’Euclide, par Abū Ja‘far al-Khāzin*. Éditions de l’Université Libanaise, Beyrouth.

فارس. ن. ٢٠١٦. رسالة أبي جعفر الخازن في تفسير الكتاب العاشر من أصول أقليدس. منشورات الجامعة اللبنانيّة-بيروت.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l’algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس، ن. ٢٠١٧. "الجبر- ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت.

Al-Karajī, Abū-Bakr. (Manuscrit. S. D). *Al-Fakhri*. Köprülü, Istanbul, 950, 1.

الكرجي، (٢). "الفخري من كلام زين الدين أبو بكر محمّد الحسن الحاسب الكرجي". (مخطوط، اسطنبول السابق، بدون تاريخ).

Al-Nadīm (Ibn). Le *Fihrist* . Édition Rida Tajaddud, Dar al Masīra, Beyroyh, S.D.

ابن النديم. "كتاب الفهرست"، تحقيق رضا تجدّد، دار المسيرة، بيروت، بدون تاريخ.

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

راشد، ر. ٢٠١٠. "رياضيّات الخوارزمي– تأسيس علم الجبر"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، صدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ترجمة عن الأصل الفرنسي المذكور ([Rashed, 2007]).

Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Wœpcke, F. 1853. *Extrait du Fakhri, par Abou Bekr Mohammed Ben al Haçan al Karkhi*. Bibliothèque Impériale, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècle)*, Vrin, Paris.